Fonction exponentielle

1 Fonction exponentielle et dérivation

► Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, dérivables sur les intervalles mentionnés, donner une expression de la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto 3x^2 + 2 + \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 6\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$
4. $f_4 : x \mapsto x\ \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{\exp(x) - 1}$ sur $]0; +\infty[$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{3x + 1}{x\ \exp(x)}$ sur $]-\infty; 0[$

■ Correction 1 :

1. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 6x + \exp(x)$.
2. Pour tout réel x, $f_2'(x) = x^2 + 6\exp(x)$.
3. Pour tout réel strictement positif x, on pose $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = x$. u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel strictement positif, $u'(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = 1$.
   Ainsi, pour tout réel x strictement positif,
   $$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x) \times x - \exp(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\exp(x)}{x^2} \end{aligned}$$
4. Pour tout réel x, on pose $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = x$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = 1$.
   Ainsi, pour tout réel x,
   $$\begin{aligned} f_4'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= \exp(x) \times 1 + \exp(x) \times x \\ &= (x+1)\exp(x) \end{aligned}$$
5. Pour tout réel strictement positif x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \exp(x) - 1$. u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \exp(x)$.

Ainsi, pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x\times(\exp(x)-1)-x^2\times\exp(x)}{(\exp(x)-1)^2} \end{aligned}$$

6. Pour tout réel strictement positif x, on pose $u(x)=3x+1$ et $v(x)=x\exp(x)$. u et v sont dérivables sur $]-\infty;0[$ et pour tout réel x strictement négatif, $u'(x)=3$ et $v'(x)=(x+1)\exp(x)$ - c'est la fonction f_4.
   Ainsi, pour tout réel x strictement négatif,

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{3\times x\exp(x)-(3x+1)\times(x+1)\exp(x)}{(x\exp(x))^2} \end{aligned}$$

   Que l'on peut simplifier en

$$f_6'(x)=\frac{3x-(3x+1)(x+1)}{x^2\exp(x)}=\frac{3x-3x^2-3x-x-1}{x^2\exp(x)}=\frac{-3x^2-x-1}{x^2\exp(x)}$$

■

► Exercice 2

On considère la fonction $f:x\mapsto(x^2+3x-2)\ \exp(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel. Montrer que $f'(x)=(x^2+5x+1)\ \exp(x)$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x=0$

■ Correction 2 :

1. Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2+3x-2$ et $v(x)=\exp(x)$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x)=2x+3$ et $v'(x)=\exp(x)$.
   Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x) \\ &= (2x+3)\exp(x)+(x^2+3x-2)\exp(x) \\ &= (x^2+5x+1)\ \exp(x) \end{aligned}$$

2. On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

   Or, $f'(0)=(0^2+5\times0+1)\ \exp(0)=1$ et $f(0)=(0^2+3\times0-2)\ \exp(0)=-2$. La tangente a donc pour équation

$$y=x-2$$

■

► Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(4x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) - 4f(x) = 0$.

■ **Correction 3 :** Pour tout réel x, $f'(x) = 4\,\exp(4x)$.

Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) - 4f(x) = 4\,\exp(4x) - 4\,\exp(4x) = 0$$

■

► Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(3x+5) \times \exp(2x+3)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dérivée de $u : x \mapsto \exp(3x+5)$?
2. Quelle est la dérivée de $v : x \mapsto \exp(2x+3)$?
3. En utilisant la dérivée d'un produit, en déduire la dérivée de f.
4. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) - 5f(x) = 0$.
5. Trouver une autre fonction f qui vérifie cette équation.

■ **Correction 4 :** Pour tout réel x,

$$u'(x) = 3\,\exp(3x+5)$$

$$v'(x) = 2\,\exp(2x+3)$$

Or, pour tout réel x, $f(x) = u(x) \times v(x)$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 3\,\exp(3x+5) \times \exp(2x+3) + \exp(3x+5) \times 2\,\exp(2x+3) \\ &= 5\,\exp(3x+5) \times \exp(2x+3) \\ &= 5\,f(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout réel x, on a

$$f'(x) - 5f(x) = 0$$

Une autre fonction qui vérifie cette relation est la fonction $g : x \mapsto \exp(5x)$.

La suite du cours nous permettra de simplifier facilement cette fonction... ■

► **Exercice 5**

Pour chacune des fonctions suivantes, dérivables sur les intervalles mentionnés, donner une expression de la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto \exp(9x-7)$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2 : x \mapsto \exp(8-5x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3 : x \mapsto (2x+1)\ \exp(2x+3)$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_4 : x \mapsto x^2\ \exp(4x-1)$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\exp(-2x+3)}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{\exp(-3x)}{x}$ sur $]-\infty;0[$

■ **Correction 5 :**

1. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 9\ \exp(9x-7)$.
2. Pour tout réel x, $f_2'(x) = -5\ \exp(8-5x)$.
3. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \exp(2x+3)$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2\exp(2x+3)$.
   Ainsi, pour tout réel x,
   $$\begin{aligned} f_3'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ &= 2\exp(2x+3) + (2x+1)\times 2\exp(2x+3) \\ &= (4x+4)\exp(2x+3) \end{aligned}$$
4. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \exp(4x-1)$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 4\exp(4x-1)$.
   Ainsi, pour tout réel x,
   $$\begin{aligned} f_4'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ &= 2x\ \exp(4x-1) + x^2\times 4\exp(4x-1) \\ &= (4x^2+2x)\exp(4x-1) \end{aligned}$$
5. Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on pose $u(x) = \exp(-2x+3)$ et $v(x) = x^2-1$. u et v sont dérivables sur $]-1;1[$, v ne s'y annule pas, et pour tout réel $x \in]-1;1[$, $u'(x) = -2\exp(-2x+3)$ et $v'(x) = 2x$.
   Ainsi, pour tout réel $x \in]-1;1[$,
   $$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-2\exp(-2x+3)\times(x^2-1) - \exp(-2x+3)\times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(-2x^2-2x+2)\exp(-2x+3)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$
6. Pour tout réel $x < 0$, on pose $u(x) = \exp(-3x)$ et $v(x) = x$. Pour tout réel $x < 0$, $u'(x) = -3\exp(-3x)$ et $v'(x) = 1$.

Ainsi, pour tout réel $x < 0$,

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-3\exp(-3x)\times x - \exp(-3x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{(-3x-1)\exp(-3x)}{x^2} \end{aligned}$$

■

2 Propriétés de la fonction exponentielle

► Exercice 6

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- $(2x+5)\exp(x) = 0$
- $(3x^2+5x+2)\ \exp(3x+4) = 0$
- $3\exp(2x+1) + 6x\ \exp(2x+1) = 0$
- $(x^2+2x+9)\exp(3x) = 0$

■ Correction 6 :

1. Soit x un réel. On sait que $\exp(x) \neq 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} (2x+5)\exp(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x+5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$
L'unique solution de l'équation $(2x+5)\exp(x) = 0$ est $-\frac{5}{2}$.

2. Soit x un réel. On sait que $\exp(3x+4) \neq 0$. Ainsi,
$$(3x^2+5x+2)\exp(3x+4) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+5x+2 = 0$$
C'est une équation du second degré, on calcule alors le discriminant Δ du polynôme $3x^2 + 5x + 2$.
$$\Delta = 5^2 - 4\times 3\times 2 = 1 > 0$$
. L'équation $(3x^2+5x+2)\exp(3x+4) = 0$ admet donc deux solutions :
$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2\times 3} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2\times 3} = -\frac{2}{3}$$

3. Soit x un réel. On a $3\exp(2x+1)+6x\ \exp(2x+1) = (3+6x)\exp(2x+1)$. Or, $\exp(2x+1) \neq 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} 3\exp(2x+1) + 6x\ \exp(2x+1) = 0 &\Leftrightarrow 3+6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
L'unique solution de l'équation $3\exp(2x+1) + 6x\ \exp(2x+1) = 0$ est $-\frac{1}{2}$.

4. Soit x un réel. On sait que $\exp(3x+4) \neq 0$. Ainsi,

$$(x^2+2x+9)\exp(3x+4) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+9 = 0$$

C'est une équation du second degré. Le discriminant Δ du polynôme x^2+2x+9 vaut

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 9 = -32 < 0$$

L'équation $(x^2+2x+9)\exp(3x+4) = 0$ n'admet donc aucune solution réelle.

■

► Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto (3x+5)\ \exp(2x+1)$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (6x+13)\ \exp(2x+1)$
2. La courbe représentative de f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales ? Si oui, pour quelles(s) valeur(s) de x ?

■ **Correction 7 :** Pour tout réel x, on pose $u(x) = 3x+5$ et $v(x) = \exp(2x+1)$. u et v sont dérivables et pour tout réel x, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2\exp(2x+1)$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

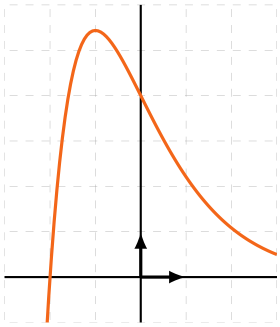
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 3\exp(2x+1) + (3x+5) \times 2\exp(2x+1) \\ &= (6x+13)\exp(2x+1) \end{aligned}$$

La courbe de f admet une tangente horizontale lorsque f' s'annule. Or, pour x un réel,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (6x+13)\ \exp(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x+13 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{13}{6} \end{aligned}$$

La courbe de f admet donc une tangente horizontale en $x = -\dfrac{13}{6}$. ■

► **Exercice 8**
On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto (ax+b)\exp(-x)$, où a et b sont des réels fixés.



1. A l'aide du graphique, trouver les valeurs des réels a et b.
2. Il semblerait que cette courbe admette une tangente horizontale en -1. Retrouver ce résultat par le calcul et montrer qu'il s'agit de la seule tangente horizontale à la courbe.

■ **Correction 8 :** Sur le graphique, on remarque que $f(0) = 4$. Or, $f(0) = (a \times 0 + b)\exp(0) = b$. Ainsi, $b = 4$.

De plus, on remarque que $f(-2) = 0$. Or, $f(-2) = (-2a+4)\exp(2)$. Ainsi, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, cela signifie que $-2a + 4 = 0$, c'est-à-dire $a = 2$.

Finalement, pour tout réel x, $f(x) = (2x+4)\exp(-x)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x + 4$ et $v(x) = \exp(-x)$. u et v sont dérivables et pour tout réel x, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -\exp(-x)$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2\exp(-x) + (2x+4) \times (-\exp(-x)) \\ &= (-2x-2)\exp(-x) \end{aligned}$$

La courbe de f admet une tangente horizontal lorsque f' s'annule. Or, pour x un réel,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (-2x-2)\exp(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

La courbe de f admet donc une tangente horizontale en $x = -1$. ■

► **Exercice 9**

Simplifier les écritures suivantes.

$\exp(5) \times \exp(9)$

$\dfrac{\exp(6)}{\exp(2)}$

$\exp(12) \times \dfrac{\exp(-5)}{\exp(3)}$

$\exp(3))^4$

$\dfrac{\exp(2) \times \exp(-5)}{\exp(4)}$

$(\exp(3) \times \exp(-6))^4$

$\left(\dfrac{\exp(-2)}{\exp(-5)}\right)^2$

$\exp(-2) \times \exp(5^2)$

$\dfrac{\exp(8) \times (\exp(3))^{-2}}{\exp(3) \times \exp(-1)}$

■ **Correction 9 :**

- $\exp(5) \times \exp(9) = \exp(5+9) = \exp(14)$
- $\dfrac{\exp(6)}{\exp(2)} = \exp(6-2) = \exp(4)$
- $\exp(12) \times \dfrac{\exp(-5)}{\exp(3)} = \exp(12 + (-5) - 3) = \exp(4)$
- $(\exp(3))^4 = \exp(3 \times 4) = \exp(12)$
- $\dfrac{\exp(2) \times \exp(-5)}{\exp(4)} = \exp(2 + (-5) - 4) = \exp(-7)$
- $(\exp(3) \times \exp(-6))^4 = \exp((3 + (-6)) \times 4) = \exp(-12)$
- $\left(\dfrac{\exp(-2)}{\exp(-5)}\right)^2 = \exp((-2 - (-5)) \times 2) = \exp(6)$
- $\exp(-2) \times \exp(5^2) = \exp(-2 + 25) = \exp(23)$
- $\dfrac{\exp(8) \times (\exp(3))^{-2}}{\exp(3) \times \exp(-1)} = \exp(8 + 3 \times (-2) - 3 - (-1)) = \exp(0) = 1$

■

► **Exercice 10**

Simplifier les écritures suivantes.

$e^5 \times e^7$

$\dfrac{e^8}{e^{-3}}$

$\dfrac{e^2}{(e^5)^{-4}}$

$\dfrac{e^3 \times e^7}{e^{-10}}$

$\dfrac{e^2 \times e^{-7}}{e^{-4} \times e^5}$

$(e^{-2})^4 \times e$

$\dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^5}{e^{-3}}$

$((e^2)^5)^3$

- $e^5 \times e^7 = e^{12}$
- $\dfrac{e^8}{e^{-3}} = e^{11}$
- $\dfrac{e^2}{(e^5)^{-4}} = e^{22}$
- $\dfrac{e^3 \times e^7}{e^{-10}} = e^{20}$
- $\dfrac{e^2 \times e^{-7}}{e^{-4} \times e^5} = e^{-6}$
- $(e^{-2})^4 \times e = e^{-7}$
- $\dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^5}{e^{-3}} = e^7$
- $((e^2)^5)^3 = e^{30}$

■

► Exercice 11

Soit x et t des réels. Simplifier les écritures suivantes.

$e^{3x+1} \times e^{5x+2}$ $\quad$ $(e^{2t-4})^5$ $\quad$ $\dfrac{e^{2x+5}}{e^{4x+7}}$

$\dfrac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}$ $\quad$ $\dfrac{e^{7-2t}}{e^{3t+4} \times e^{-4t+1}}$ $\quad$ $\dfrac{e^{2x+3t} \times e^{4x-5t}}{e^{2t+8x}}$

- $e^{3x+1} \times e^{5x+2} = e^{8x+3}$
- $(e^{2t-4})^5 = e^{10t-20}$
- $\dfrac{e^{2x+5}}{e^{4x+7}} = e^{-2x-2}$
- $\dfrac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}} = e^{-8x+3}$
- $\dfrac{e^{7-2t}}{e^{3t+4} \times e^{-4t+1}} = e^{2-t}$
- $\dfrac{e^{2x+3t} \times e^{4x-5t}}{e^{2t+8x}} = e^{-2x-4t}$

■

► Exercice 12

Soit x un réel. Que vaut $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2$?

■ **Correction 12 :** On utilise une identité remarquable

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

De même,

$$(e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$$

Ainsi,

$$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 4$$

Il est également possible de factoriser. ■

► Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = e^{2n+3}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. En déduire que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. Donner la valeur de $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{16}$.

■ Correction 13 : Pour tout entier n

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2(n+1)+3}}{e^{2n+3}} = \frac{e^{2n+5}}{e^{2n+3}} = e^{2n+5-(2n+3)} = e^2$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = e^2 \times u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^2.

En utilisant le résultat du chapitre sur les suites géométriques, on a

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{16} = u_0 \times \frac{1-(e^2)^{16+1}}{1-e^2} = e^3 \times \frac{1-e^{34}}{1-e^2}$$

■

► Exercice 14

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

- $(3x+2)\,e^x > 0$
- $(5x-4)\,e^{6-3x} \leqslant 0$
- $(8x+2)(3x-1)\,e^{5x-4} < 0$
- $(4x^2+5x-6)\,e^{2x^2-3x+1} \leqslant 0$

■ Correction 14 :

- L'exponentielle étant toujours strictement positive, on a $(3x+2)\,e^x > 0$ si et seulement si $3x+2>0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{2}{3}$.

$$S = \left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$$

- L'exponentielle étant toujours strictement positive, on a $(5x-4)\,e^{6-3x} \leqslant 0$ si et seulement si $5x-4 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant \dfrac{4}{5}$.

$$S = \left]-\infty;\frac{4}{5}\right]$$

- L'exponentielle étant toujours positive, on s'intéresse au signe de $(8x+2)(3x-1)$. Pour cela, on construit un tableau de signe.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$8x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$Signe$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S = \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right[$

- L'exponentielle étant toujours positive, on s'intéresse au signe de $4x^2+5x-6$. Il s'agit d'une expression polynomiale du second degré. On calcule son discriminant Δ.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-6) \times 4 = 121 > 0$$

Ainsi, le polynôme $4x^2+5x-6$ possède deux racines

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{121}}{2\times 4} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{121}}{2\times 4} = \frac{3}{4}$$

Le coefficient en x^2 est 4, qui est positif. Ainsi, $4x^2+5x-6$ est "positif à l'extérieur des racines".

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x^2+5x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S = \left[-2; \frac{3}{4}\right]$

■

3 Études de fonctions

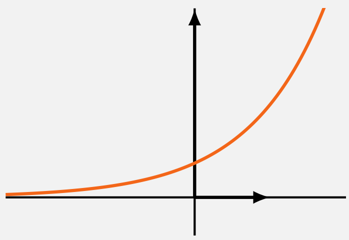
► Exercice 15

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{4x-5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel, que vaut $f'(x)$?
2. En déduire le signe de f' et les variations de f.
3. Tracer une allure possible de la courbe de f dans un repère orthogonal.

■ **Correction 15 :** Pour tout réel x, $f'(x) = 4e^{4x-5}$

L'exponentielle est toujours positive. Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante.



■

► **Exercice 16**

On considère la fonction $f : x \mapsto (-x+2)\,e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-x+1)\,e^x$
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.
3. Où la fonction f atteint-elle son maximum ?
4. On admet que la courbe de la fonction f se rapproche de 0 en $-\infty$. Tracer une allure possible de la courbe de f dans un repère orthogonal.

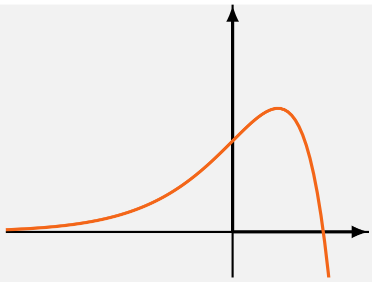
■ **Correction 16 :** Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x+1$ et $v(x) = e^x$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -1 \times e^x + (-x+2) \times e^x \\ &= (-x+1)e^x \end{aligned}$$

L'exponentielle étant toujours strictement positive, on s'intéresse seulement en signe de $-x+1$. Celui-ci change seulement en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

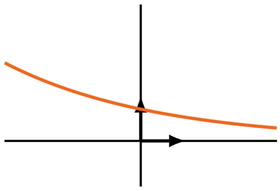
La fonction f admet son maximum en 1.



■

► **Exercice 17**

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto a \exp(-bx)$, où a et b sont des réels.



1. A l'aide du graphique, déterminer le signe de a
2. A l'aide du graphique, déterminer le signe de b.

■ **Correction 17 :**

1. On regarde en 0 : $f(0) = a \times exp(0) = a$. Sur le graphique, on voit que $f(0) > 0$, a est donc positif.
2. On a $f'(x) = -ab \exp(-bx)$. Or, a est positif et l'exponentielle l'est également. La fonction est décroissante ce qui signifie que $f' < 0$. Ainsi, $-b > 0$, d'où $b > 0$.

■

► **Exercice 18**

On considère la fonction $f : x \mapsto (2x^2 + 8x + 5)e^{2x+3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (4x^2 + 20x + 18)\, e^{2x+3}$.
2. En déduire le tableau de signe de f' et les variations de f.

■ **Correction 18 :** Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2 + 8x + 5$ et $v(x) = e^{2x+3}$. u et v sont dérivables et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (4x + 8) \times e^{2x+3} + (2x^2 + 8x + 5) \times 2e^{2x+3} \\ &= (4x^2 + 20x + 18)e^{2x+3} \end{aligned}$$

L'exponentielle étant toujours positive, il suffit d'étudier le signe de $4x^2 + 20x + 18$. C'est un polynôme du second degré. Calculons son discriminant Δ.

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 4 \times 18 = 112 > 0$$

Le polynôme admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{-20-\sqrt{112}}{2\times 4} = \frac{-20-4\sqrt{7}}{8} = -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-20+\sqrt{112}}{2\times 4} = \frac{-20+4\sqrt{7}}{8} = -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Le tableau de variation de f est donc le suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

■

► Exercice 19

On considère les fonction $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$. Soit a un réel. On note T_a la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a et D_a la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a.

1. Pour $a = 0$, donner les équations réduites de T_0 et D_0.
2. En général, donner les équations réduite de T_a et D_a.
3. Montrer que pour tout réel a, T_a et D_a sont perpendiculaires.

■ **Correction 19 :** Remarquons que pour tout réel x, $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = -e^{-x}$.

- L'équation de T_0 est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit $y = x+1$
- L'équation de D_0 est $y = g'(0)(x-0)+g(0)$, soit $y = -x+1$

Soit a un réel,

- L'équation de T_a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, soit $y = e^a\,x + e^(a)\,(1-a)$
- L'équation de D_a est $y = g'(a)(x-a)+g(a)$, soit $y = -e^{-a}\,x + e^{-a}\,(1+a)$

On rappelle que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx+p$. Ainsi, $\vec{u}_a \begin{pmatrix}1\\e^a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T_a et $\vec{v}_a \begin{pmatrix}1\\-e^{-a}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_a. On calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs. Puisque l'on est dans un repère orthonormé, on peut utiliser la formule "$xx'+yy'$. Ainsi,

$$\overrightarrow{u_a}\cdot\overrightarrow{v_a} = 1\times 1 + e^a \times \left(-e^{-a}\right) = 1-1 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u_a}$ et $\overrightarrow{v_a}$ sont orthogonaux, les droites T_a et D_a sont donc perpendiculaires. ■

► Exercice 20

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$

- $e^{2x+1} = e^3$
- $e^{3x+1} = e^{4-9x}$
- $e^{3x^2+5x-8} = 1$
- $(e^x - 1)(3x+2) = 0$

■ **Correction 20 :**
- Soit x un réel. $e^{2x+1} = e^3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$. L'unique solution de l'équation $e^{2x+1} = e^3$ est 1.
- Soit x un réel. $e^{3x+1} = e^{4-9x} \Leftrightarrow 3x+1 = 4-9x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. L'unique solution de l'équation $e^{3x+1} = e^{4-9x}$ est $\frac{1}{4}$.
- On rappelle que $1 = e^0$. Ainsi, soit x un réel.
  On a $e^{3x^2+5x-8} = 1 \Leftrightarrow 3x^2+5x-8 = 0$. C'est une équation du second degré. La résolution de cette équation avec le discriminant donne alors deux solutions, 1 et $-\frac{8}{3}$.
- Soit x un réel. $(e^x - 1)(3x+2) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ ou $3x+2 = 0$. On utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul. Ainsi, les solutions sont 0 et $-\frac{2}{3}$.

■

► Exercice 21

Soit t un réel. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$.

$$4e^{2t} + 7e^t - 11 = 0$$

On pourra poser $X = e^t$ et faire un changement de variable.

■ **Correction 21 :** Posons $X = e^t$, alors $X^2 = (e^t)^2 = e^{2t}$. L'équation se réécrit

$$4X^2 + 7X - 11 = 0$$

C'est une équation du second degré qui a deux solutions, $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{11}{4}$.

Ainsi, $4e^{2t} + 7e^t - 11 = 0$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = -\frac{11}{4}$, c'est-à-dire $e^t = 1$ ou $e^t = -\frac{11}{4}$.

Le premier cas donne $t = 0$. Le deuxième est impossible car une exponentielle est toujours positive. L'unique solution est donc 0. ■

► **Exercice 22**
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

- $e^{3t+2} \leqslant e^7$
- $e^{2-4x} > e^{6x-5}$
- $e^{3x^2+5x-8} \geqslant e^{2x+7}$
- $\dfrac{e^{3x+7}}{e^{5x-8}} < e^{4x-1}$

■ **Correction 22 :**

- Soit t un réel. $e^{3t+2} \leqslant e^7 \Leftrightarrow 3t+2 \leqslant 7 \Leftrightarrow t \leqslant \dfrac{5}{3}$. Ainsi, $S = \left]-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$.
- Soit x un réel. $e^{2-4x} > e^{6x-5} \Leftrightarrow 2-4x > 6x-5 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{10}$. Ainsi, $S = \left]-\infty; \dfrac{7}{10}\right[$.
- Soit x un réel. $e^{3x^2+5x-8} \geqslant e^{2x+7} \Leftrightarrow 3x^2+5x-8 \geqslant 2x+7 \Leftrightarrow 3x^2+3x-15 \geqslant 0$.
  On a une inéquation du second degré, on calcule le discriminant Δ du polynôme $3x^2+3x-15$.

  $$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times (-15) = 189 > 0$$

  Le polynôme a deux racines réelles distinctes, et est positif (du signe de 3) en dehors de ces racines.

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{189}}{2\times 3} = \frac{-3-3\sqrt{21}}{6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{189}}{2\times 3} = \frac{-3+3\sqrt{21}}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

  Ainsi, $S = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}; +\infty\right[$

- Soit x un réel. En simplifiant, on a que $\dfrac{e^{3x+7}}{e^{5x-8}} = e^{3x+7-(5x-8)} = e^{-2x+15}$. Ainsi,

  $$\frac{e^{3x+7}}{e^{5x-8}} < e^{4x-1} \Leftrightarrow e^{-2x+15} < e^{4x-1} \Leftrightarrow -2x+15 < 4x-1 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$$

  Finalement, $S = \left]\dfrac{8}{3}; +\infty\right[$.

■