GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Partie 1 : Rappels

Propriétés :

● Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

● $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$.

● Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

● Soit deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (1)

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Remarque

Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité : Soit un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de la droite d.

Comme le point A appartient également à d, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit :

$5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.

Soit encore : $5x+y-16=0$.

Une équation cartésienne de d est : $5x+y-16=0$.

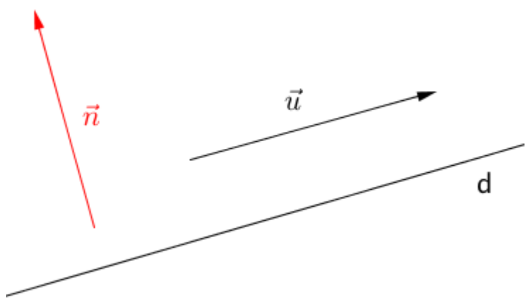
Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (2)

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.

Partie 2 : Vecteur normal à une droite

Définition : Soit une droite d.

On appelle **vecteur normal** à la droite d, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.



$\vec{u}$ est le vecteur directeur

$\vec{n}$ est le vecteur normal

Propriété : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration :

- Soit un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ de la droite.

$M(x;y)$ est un point de la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
Soit encore : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
$ax+by-ax_A-by_A=0$.

- Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vérifie : $-b\times a+a\times b=0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Exemple :
Soit la droite d'équation cartésienne $2x-3y-6=0$.
Un vecteur normal de la droite est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
Un vecteur directeur de la droite est : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
On vérifie que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{u}\,.\vec{n}=2\times 3+(-3)\times 2=0$

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

On considère la droite d passant par le point $A(-5;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite d d'équation $x+3y-4=0$ et le point $A(2;4)$.
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite d.

Partie 3 : Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon r est :
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$

Éléments de démonstration :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2=r^2$.

Exemple :
Le cercle de de centre $A(3;-1)$ et de rayon 5 a pour équation : $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

On considère le cercle de centre $A(4;-1)$ et passant par le point $B(3;5)$.
Déterminer une équation du cercle.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

L'équation $x^2+y^2-2x-10y+17=0$ est-elle une équation de cercle ? Si oui, déterminer son centre et son rayon.