GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Partie 1 : Rappels

Propriétés :

● Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

● $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$.

● Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

● Soit deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (1)

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Correction

La droite d admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

- Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, on a : $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $a=5$ et $b=1$.

Une équation de d est donc de la forme $5x+1y+c=0$.

- Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ de A dans l'équation :

$5\times3+1\times1+c=0$
$15+1+c=0$
$16+c=0$
$c=-16$

Une équation de d est donc $5x+y-16=0$.

Remarque

Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité :

Soit un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de la droite d.

Comme le point A appartient également à d, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit :

$5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.

Soit encore : $5x+y-16=0$.

Une équation cartésienne de d est : $5x+y-16=0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (2)

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

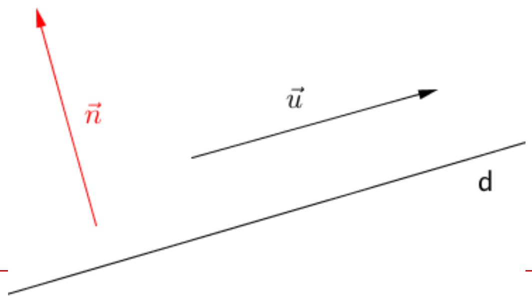
Correction

• B et C appartiennent à d donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d.
On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Donc $a = -6$ et $b = 4$.
Une équation cartésienne de d est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

• $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ appartient à d donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.
Une équation cartésienne de d est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

Partie 2 : Vecteur normal à une droite

Définition : Soit une droite d.
On appelle **vecteur normal** à la droite d, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.



$\vec{u}$ est le vecteur directeur
$\vec{n}$ est le vecteur normal

Propriété : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration :
- Soit un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ de la droite.
$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$ax + by - ax_A - by_A = 0$.
- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Exemple :

Soit la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.
Un vecteur normal de la droite est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
Un vecteur directeur de la droite est : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

On vérifie que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{u}.\vec{n} = 2 \times 3 + (-3) \times 2 = 0$

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

On considère la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

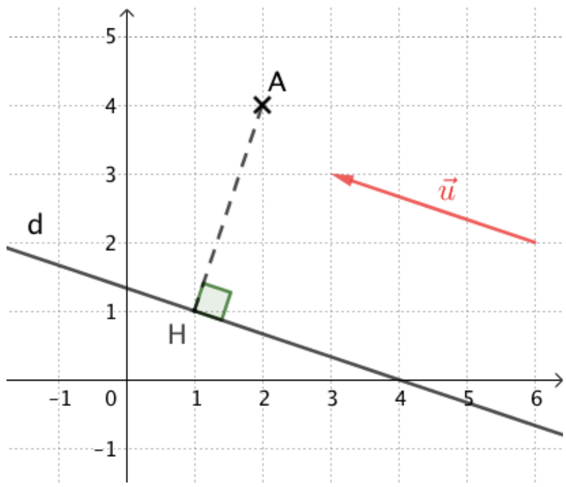
Correction
● Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d, une équation cartésienne de d est de la forme $3x - y + c = 0$
● Le point $A\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ appartient à la droite d, donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc : $c = 19$.
Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite d.

Correction
- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Et donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme :
$-3x + y + c = 0$.



Or, le point $A\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.
Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

- H est le point d'intersection de d et (AH), donc ses coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 9y - 12 + y + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite d, a pour coordonnées $\binom{1}{1}$.

Partie 3 : Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A\binom{x_A}{y_A}$ et de rayon r est :
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Éléments de démonstration :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.

Exemple :
Le cercle de de centre $A\binom{3}{-1}$ et de rayon 5 a pour équation : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

On considère le cercle de centre $A\binom{4}{-1}$ et passant par le point $B\binom{3}{5}$.
Déterminer une équation du cercle.

Correction

● Le cercle a pour centre le point $A\binom{4}{-1}$ donc une équation du cercle est de la forme :
$(x - 4)^2 + (y - (-1))^2 = r^2$
$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = r^2$

● On détermine le carré du rayon du cercle à l'aide de la formule de la distance :
$r^2 = AB^2 = (3 - 4)^2 + \left(5 - (-1)\right)^2 = (-1)^2 + 6^2 = 37$

● Une équation cartésienne du cercle est alors : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

L'équation $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ est-elle une équation de cercle ? Si oui, déterminer son centre et son rayon.

Correction

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$

$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$

← car $x^2 - 2x$ est le début du développement de $(x-1)^2$ et $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 10y + 25) - 25 + 17 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 17 = 0$

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 3^2$

Il s'agit d'une équation du cercle de centre $A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et de rayon 3.