Correction du devoir maison : démonstration du théorème de Ménalaüs

1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C} = -\overrightarrow{A'B} + \frac{1}{p}\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\overrightarrow{A'B} = \frac{1-p}{p}\overrightarrow{A'B}$

Et donc $\overrightarrow{A'B} = \frac{p}{1-p}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{B'A} + q\overrightarrow{B'A} = (q-1)\overrightarrow{B'A}$ et donc $\overrightarrow{B'A} = \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B} = -\overrightarrow{C'A} + \frac{1}{r}\overrightarrow{C'A} = (\frac{1}{r} - 1)\overrightarrow{C'A} = \frac{1-r}{r}\overrightarrow{C'A}$ donc $\overrightarrow{C'A} = \frac{r}{1-r}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{C'A} = \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC} - \frac{r}{1-r}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix} \frac{-r}{1-r} \\ \frac{1}{q-1} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \frac{p}{1-p}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{p}{1-p}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC} = \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)\overrightarrow{BA} + \left(\frac{p}{1-p} - \frac{1}{q-1}\right)\overrightarrow{AC}$

$= \left(\frac{1}{1-p}\right)\overrightarrow{BA} + \frac{p(q-1)-1+p}{(1-p)(q-1)}\overrightarrow{AC} = \frac{-1}{1-p}\overrightarrow{AB} + \frac{pq-1}{(1-p)(q-1)}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} \frac{-1}{1-p} \\ \frac{pq-1}{(1-p)(q-1)} \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ colinéaires $\Leftrightarrow \frac{-1}{1-p}\frac{1}{q-1} - \frac{pq-1}{(1-p)(q-1)}\frac{-r}{1-r} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-(1-r)}{(1-p)(q-1)(1-r)} + \frac{pqr-r}{(1-p)(q-1)(1-r)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-1+r+pqr-r}{(1-p)(q-1)(1-r)} = 0 \Leftrightarrow pqr - 1 = 0 \Leftrightarrow$ pqr=1

On a donc bien A', B' et C' sont alignés si et seulement si pqr = 1.