Nom & Prénom : …….. www.dimension-k.com

Contrôle 1ère S
Dérivation & un petit chouia de géométrie vectorielle

Exercice 1

Soit f et g les fonctions telles que $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.

1) Donner les domaines de définition de f et f'.
2) Donner et simplifier le taux de variation entre 0 et $0 + h$ de la fonction f.
3) Semble-t-il avoir une limite finie (c'est-à-dire un nombre précis) quand h tend vers 0 ?
4) Donner les domaines de définition de g et g'.
5) Déterminer la limite de $g'(x)$ quand x tend vers 0.
6) Donner le taux de variation entre 0 et 0+h de la fonction g, puis sa limite quand h tend vers 0
7) Comparez les résultats obtenus en 5) et 6)

On dira alors que l'on peut étendre le domaine de définition de g' à 0 en gardant la même formule.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 1$

1) Dériver f, et prouver que la fonction obtenue est égale à $4(5 - x)(1 - x)(x + 3)$
2) Faire le tableau de variation de la fonction f
3) Vous penserez à écrire les ordonnées des extrémums dans le tableau.

Exercice 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par $f(x) = \frac{7}{x-5}$

1) Déterminerf', et faire le tableau de variations de la fonction f
2) Déterminer de deux manières différentes $f'(3)$.
3) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3

Exercice 4

Soit ABCD un parallélogramme de centre 0 et M,N,P et Q des points vérifiant les égalités suivantes :

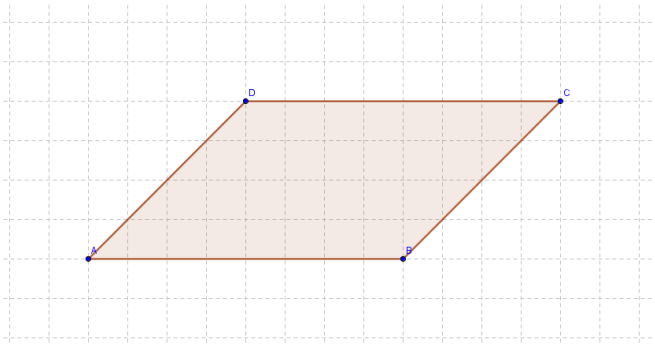
$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DA}$

On se placera dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$

1) Sans justifier donner les coordonnées de A,B, C et D
2) En justifiant donner celles de O, M et N

On admettra que les coordonnées de P et Q sont $P\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ et $Q\left(0; -\frac{1}{4}\right)$

3) Que représente O pour [PM] et [QN] ?
4) En déduire la nature de MNPQ
5) Retrouver ce résultat d'une autre manière



Nom & Prénom : ……. www.dimension-k.com

Contrôle 1ère S

Exercice 1 (20min)

1) f est définie sur $[0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $D_{f'}=]0;+\infty[$

2) $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$

3) non elle ne semble pas avoir de limite finie

4) g est définie sur $[0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{g'}=]0;+\infty[$,

Remarque : comme j'ai utilisé la dérivée de $\sqrt{x}$ qui n'est définie , la valeur 0 ne fais pas partie de mon ensemble de définition. Je peux simplifier $g'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, mais cette simplification n'intervient après coup, comme quand on s'intéressait aux limites de fonction non définie en a, et qu'après un peu de recherche on se rendait compte qu'il existait une forme équivalente (partout sauf en a) à la fonction de départ mais qu'elle n'avait plus de problème en a.

5) $g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ donc $\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\sqrt{x}=0$

6) $\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\frac{(0+h)\sqrt{0+h}-0\sqrt{0}}{h}=\frac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$ on a donc $g'(0)=0$

7) on a donc $g'(0)=0=\lim_{x\to 0}g'(x)$

On dira alors que l'on peut étendre le domaine de définition de g' à 0 en gardant la même formule.

Exercice 2 (20min)

$f'(x)=4x^3-12x^2-52x+60$

$4(5-x)(1-x)(x+3)=4[x^2-6x+5](x+3)$

$=4[x^3-6x^2+5x+3x^2-18x+15]$

$=4[x^3-3x^2-13x+15]=4x^3-12x^2-52x+60$

On a des extremums en -3, 1 et 5 car la dérivée s'annule pour changer de signe en ces valeurs.

x		-3		1		5	
5-x	+		+		+	0	-
1-x	+		+	0	-		-
x+3	-	0	+		+		+
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘	-224	↗	32	↘	-224	↗

Exercice 3 (16min)

1) $f'(x)=-\frac{7}{(x-5)^2}$

2) $f'(3)=-\frac{7}{(3-5)^2}=-\frac{7}{4}=-1{,}75$

$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\frac{7}{3+h-5}-\frac{7}{-2}}{h}=\frac{\frac{7\times 2}{(h-2)2}+\frac{7(h-2)}{2(h-2)}}{h}=\frac{\frac{14+7h-14}{(h-2)2}}{h}$

$=\frac{7h}{h(h-2)2}=\frac{7}{(h-2)2}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{7}{(h-2)2}=-\frac{7}{4}$

x		5	
-7	-		-
$(x-5)^2$	+	0	+
f'(x)	-	‖	-
f(x)	↘	‖	↘

4) $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ donc $y=-\frac{7}{4}(x-3)+\frac{7}{-2}$ donc $y=-\frac{7}{4}x+\frac{21}{4}-\frac{14}{4}$ donc $y=-\frac{7}{4}x+\frac{7}{4}$

Exercice 4 (22min)

1) A(0 ;0), B(1 ;0), C(1 ;1), D(0 ;1)

2) O milieu de [AC] donc $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AC}\binom{1-0}{1-0}$ donc $\overrightarrow{AO}\binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ donc $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{AB}\binom{1-0}{0-0}$ donc $\overrightarrow{AM}\binom{\frac{5}{4}}{0}$ donc $M\left(\frac{5}{4};0\right)$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{AB}\binom{1}{0}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{1-1}{1-0}=\overrightarrow{BC}\binom{0}{1}$ donc $\overrightarrow{AN}\binom{1+0}{0+\frac{5}{4}}$ donc $N\left(1;\frac{5}{4}\right)$ $P\left(-\frac{1}{4};1\right)$ et $Q\left(0;-\frac{1}{4}\right)$

3) 4) on a l'impression que c'est le milieu, vérifions : soit I le milieu de [PM] on aura : $I\left(\frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{2};\frac{1+0}{2}\right)$donc $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, soit J le milieu de [QN] on a donc $J\left(\frac{0+1}{2};\frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{2}\right)$ donc $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi I,J et 0 sont confondus , donc 0 est le milieu de [PM] et [QN] , or si un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

5) déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{QP}\binom{-\frac{1}{4}-0}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\overrightarrow{QP}\binom{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}$ et $\overrightarrow{MN}\binom{1-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-0}=\overrightarrow{MN}\binom{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}$ donc $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$ donc QPNM est un parallélogramme.