Nom :

D.S. n°4	Mathématiques	1ère S
1 h (coeff. : 3)	**Dérivation**	*Mardi 7 décembre 2004*

Exercice 1 COURS (1+2.5+0.5=4 points)

1. Donner la définition du nombre dérivé et son interprétation graphique.

2. Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $f(x) = \sqrt{x} + 1$
   En utilisant la définition du nombre dérivé calculer f '(1).

3. Déterminer f '(x) en utilisant maintenant les théorèmes vus en cours et comparer le résultat obtenu pour x =1 dans la question 2°)

Exercice 2 (2 points) Cadeau !!

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous après avoir précisé l'ensemble de dérivation.

1. g définie sur ℝ par $g(x) = -2x^3 + x - 2^2$
2. h définie sur ℝ par $h(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{2}$
3. i définie sur]0 :+ ∞ [par $i(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \pi^2$

Exercice 3 (3.5 points)

j est une fonction définie sur ℝ par $j(x) = (x^2 + 1)(-2x^3 + 3x - 7)$.

1. Calculer j '(x) pour tout réel x.
2. Déterminer une équation de la tangente à Cj au point d'abscisse 1.
3. Donner l'approximation affine associée à j pour x proche de 1.
   En déduire une valeur approchée de j(1,1). Comparer avec la valeur exacte.

Exercice 4 (3 points)

Soit k déf. sur D =]2 ;+ ∞[par $k(x) = \frac{2x+1}{3x - 6}$

1. Calculer k '(x) pour tout réel x de D.
2. Etudier le signe de k '(x) et dresser le tableau de variation de la fonction k.
3. La courbe Ck admet-elle des tangentes horizontales ?

Exercice 5 (0.5+2.5+1+2+1.5=7.5 points)

Soit f est une fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x$

1. Calculer f '(x) pour tout réel x.
2. Etudier le signe de f '(x) et dresser le tableau de variation de la fonction f.
3.
   a. Déterminer une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0.
   b. Etudier la position de Cf par rapport à T.

4. La courbe Cf admet-elle une(des) tangente(s) parallèle(s) à la droite d'équation y = -5x + 1 ?
   En quels points ?

5. ***Bonus :*** *Représenter Cf dans un repère bien choisi (2 points)*

D.S. n°4	Mathématiques - CORRECTION	1ère S

Exercice 1 COURS (1+2.5+0.5=4 points)

4. Donner la définition du nombre dérivé et son interprétation graphique.
5. Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $f(x) = \sqrt{x} + 1$. En utilisant la définition du nombre dérivé calculer f '(1).

   Soit $h \neq 0$ alors $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}+1-(\sqrt{1}+1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)}$

   donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}$ de ce fait $\boxed{f'(1) = \frac{1}{2}}$
6. Déterminer f '(x) en utilisant maintenant les théorèmes vus en cours et comparer le résultat obtenu pour x =1 dans 2°)

   f dérivable sur]0 ;+ ∞[et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc on a bien $f'(1) = \frac{1}{2}$

Exercice 2 (2 points) Cadeau !!

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous après avoir précisé l'ensemble de dérivation.

4. g définie sur IR par $g(x) = -2x^3 + x - 2^2$ g dérivable sur IR car fonction polynôme et $\boxed{g'(x) = -6x^2 + 1}$
5. h définie sur IR par $h(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{2}$ h dérivable sur IR car fonction polynôme et $\boxed{h'(x) = t + \frac{2}{3}}$
6. i définie sur]0 :+ ∞ [par $i(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \pi^2$ i dérivable sur]0 ; + ∞[car somme de fonctions qui le sont et $\boxed{i'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}}$

Exercice 3 (3.5 points) j est une fonction définie sur IR par $j(x) = (x^2 + 1)(-2x^3 + 3x - 7)$.

4. Calculer j '(x) pour tout réel x. j dérivable sur IR car fonction polynôme et $\boxed{j'(x) = -10x^4 + 3x^2 - 14x + 3}$
5. Déterminer une équation de la tangente à Cj au point d'abscisse 1. Une équation de la tgte au point d'abscisse x=1 est $\boxed{: y = -18x + 6}$
6. Donner l'approximation affine associée à j pour x proche de 1. D'après la question précédente, $\boxed{f(x) \approx -18x + 6}$ si x proche de 1

   En déduire une valeur approchée de j(1,1). Comparer avec la valeur exacte. donc on obtient $\boxed{f(1,1) \approx -18\times1,1+6 \approx -13,6}$ que l'on peut comparer avec la valeur exacte obtenue avec la calculatrice f(1,1) = -14,06002

Exercice 4 (3 points) Soit k déf. sur D =]2 ;+ ∞[par $k(x) = \frac{2x+1}{3x - 6}$

4. Calculer k '(x) pour tout réel x de D. k dérivable sur son ensemble de définition car c'est une fonction rationnelle et $\boxed{k'(x) = \frac{-15}{(3x-6)^2}}$
5. Etudier le signe de k '(x) et dresser le tableau de variation de la fonction k.
   -15<0 (si c'est vrai !!) et $(3x-6)^2 \geq 0$ et nul si x = 2 (valeur interdite) donc f est décroissante sur]2 ; + ∞[
6. La courbe Ck admet-elle des tangentes horizontales ?Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0, donc il faut résoudre f '(x) = 0 , équation qui n'a pas de solution, donc Ck n'admet pas de tangente horizontale.

Exercice 5 (0.5+2.5+1+2+1.5=7.5 points) Soit f est une fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x$

6. Calculer f '(x) pour tout réel x. $\boxed{f'(x) = x^2 - 2x - 8}$
7. Etudier le signe de f '(x) et dresser le tableau de variation de la fonction f. f ' est une fonction polynôme du second degré, donc on trouve les racines du polynôme avec le discriminent Δ. Les racines sont -2 et 4 donc on obtient le tableau de variation suivant

x	- ∞		-2		4		+ ∞
signe de f '(x)		+	0	-	0	+	
variation de f		↗		↘		↗	

avec f(-2) ≈ -9,33 et f(4) ≈ -26,66

8.

   c. Déterminer une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0. $\boxed{y = -8x}$

   d. Etudier la position de Cf par rapport à T. Il faut étudier le signe de l'écart f(x) – (-8x) (ET PAS f(x) – T QUI NE VEUT RIEN DIRE !!!!). Or $f(x) - (-8x) = \frac{x^3}{3} - x^2 = x^2(\frac{x}{3} - 1) = \frac{x^2(x-3)}{3}$ donc on obtient facilement :

x	- ∞		0		3		+ ∞
signe de x^2		+	0	+		+	
signe de (x-3)		-		-	0	+	
signe de f(x) – (-8x)		-	0	-	0	+	
position de Cf / T		**Cf au dessous de T**		**Cf au dessous de T**		**Cf au dessus de T**	

9. La courbe Cf admet-elle une(des) tangente(s) parallèle(s) à la droite D d'équation y = -5x + 1 ?
   Les tangentes à Cf aux points d'abscisse x sont parallèles à D si elles ont le même coefficient directeur que D donc si f '(x) = -5.

Il faut résoudre l'équation f '(x) = -5 soit $x^2 - 2x - 8 = -5$ ou $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Les solutions sont x=-1 et x = 3 qui sont les abscisses des points cherchés. A(-1 ; f(-1)) et B(3 ; f(3)) soit $\boxed{A(-1 ; \frac{-20}{3})\ B(3 ;-24)}$