Devoir Maison :
Démonstration de quelques formules trigonométriques

Le but de ce devoir maison est de démontrer les formules ci-dessous, et pour cela vous ne pouvez utiliser que la définition du cercle trigonométrique et les propriétés des arcs associés. A la fin de chaque démonstration vous entourerez votre conclusion en rouge.

(I) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin(a)$ (II) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos(a)$ (III) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\frac{-1}{\tan(a)}$

(IV) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
(V) $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

(VI) $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
(VII) $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$
(VIII) $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$
(IX) $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$
(X) $\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$
(XI) $\cos(a)\cos(b)=\frac{-1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$
(XII) $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

I Démonstration des formules (I) , (II) et (III)

1) En utilisant deux des propriétés des arcs associés prouvez les trois premières formules.

II Démonstration des formules d'addition : (IV) et (V)

Soient a et b deux angles (pour vous faciliter la vie il vaut mieux les prendre petits), placez dans un cercle trigonométrique (dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, un cercle de rayon une unité) le point A correspondant à l'angle a et B correspondant à l'angle a + b.

2) Donnez les coordonnées de A et de B dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ en déduire une expression de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3) Soit A' le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle $\frac{\pi}{2}+a$ donnez une expression de $\overrightarrow{OA'}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
4) Que peut on dire du repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)$?
5) A quel angle correspond le point B dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)$?
6) En déduire une expression de $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
7) En déduire une nouvelle expression de $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
8) Retrouvez les formules (IV) et (V) grâce à ce qui précède.

A partir de maintenant les formules (IV) et (V) sont considérées comme démontrées.

III Démonstration des autres formules

9) En utilisant les formules (IV) et (V) et les deux des propriétés des arcs associés, prouvez les formules (VI) et (VII)
10) En utilisant les formules (IV) et (V) avec un 'b' astucieusement choisi prouvez les formules (V) et (VI)
11) En utilisant les formules (IV) et (V) prouvez les dernières formules.