Parité

I. Nombres entiers

1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$. Exemples : $4 \in \mathbb{N}$ $-2 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$. Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

II. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples : 34, 68 et 0 sont des nombres pairs 567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

....

....

....

....

....

....

....

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs
Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

....

....

....

....

....

....

………

………

………

………

………

………

………

………

Exercices sur la parité de nombres

Exercice 1
Parmi la liste de nombres suivante déterminer lesquels sont pairs :
$25 + 15$ $\quad 5^2$ $\quad \sqrt{36}$ $\quad \frac{378}{3}$ $\quad \frac{154}{3}$ $\quad 15^2 - 8$

Exercice 2
Montrer que le carré d'un nombre pair est pair.

Exercice 3
Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est pair.

Exercice 4
On considère un entier naturel n.

1) Étudier la parité des nombres suivants :
   $A = 2n + 6$ $\qquad B = 6n + 8$ $\qquad C = 40n + 1$
2) Montrer que $A + C$ est un multiple de 7. Autrement dit qu'on peut écrire $A + C = 7k$ avec k un entier.

Exercice 5
Pour tout entier naturel n montrer que $5n^2 + 3n$ est un nombre pair.

Exercice 6
La somme de deux entiers consécutifs est-elle paire ou impaire ?

Exercice 7
On considère un entier k. Déterminer la parité de $(k + 1)^2 - k^2$.

Exercice 8
Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
Remarque : La division euclidienne de a par b donne un quotient q et un reste r tels que $a = bq + r$
On cherche donc à prouver que le carré est de la forme $8q + 1$ avec q un entier.

Exercice 9 (à faire une fois que le 8 est compris)
On considère deux entiers naturels impairs a et b.
Montrer que $N = a^2 + b^2 + 6$ est divisible par 8.

Exercice 10
On s'intéresse à la parité de la somme de quatre entiers consécutifs

1) Tester cette somme avec de vraies valeurs que vous choisirez et conjecturer la parité de la somme.
2) Soit n votre premier entier, exprimer les valeurs des 3 entiers qui le suivent en fonction de n
3) Prouver la conjecture de la première question.

Bonus : Exercices du livre : 75, 76 P54

Corrections

Cours :

Le carré d'un nombre impair est impair. (Démonstration au programme)

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$, avec $q = 2k^2 + 2k$.
q est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2q + 1$ et donc a^2 est impair.

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n + 1$.
- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
  Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
  $n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2q$, avec $q = k(2k + 1)$ entier.
  Donc $n(n + 1)$ est pair.
- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, avec k entier.
  Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
  $n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1) = 2q'$, avec $q' = (2k + 1)(k + 1)$ entier.
  Donc $n(n + 1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Exercices

Exercice 1

Parmi la liste de nombres suivante déterminer lesquels sont pairs :

$25 + 15 = 40 = 2 \times 10$ donc c'est un nombre pair

$\sqrt{36} = 6 = 2 \times 3$ donc c'est un nombre pair

$\frac{154}{3}$ n'est pas un entier donc c'est un nombre ni pair ni impair

$5^2 = 25 = 2 \times 12 + 1$ donc c'est un nombre impair

$\frac{378}{3} = 126 = 2 \times 63$ donc c'est un nombre pair

$15^2 - 8 = 225 - 8 = 2 \times 108 + 1$ donc c'est un nombre impair

Exercice 2

Montrer que le carré d'un nombre pair est pair.

Soit n un nombre pair, alors par définition il existe un nombre entier k tel que $n = 2k$ et ainsi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2 = 2q$ avec $q = 2k^2$ un entier (car produit d'entiers) donc n^2 est bien pair.

Exercice 3

Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est pair.

Soit n le plus petit des trois entiers, le produit étudié est donc $P = n(n + 1)(n + 2)$
D'après le cours je sais que le produit de deux entiers consécutifs est pair, donc le produit des deux premiers nombres $n(n + 1)$ est pair, et donc son résultat peut s'écrire sous la forme $2k$.
Le grand produit vaut donc $P = 2k(n + 2) = 2(k(n + 2)) = 2q$ avec $q = k(n + 2)$ un entier (car produit d'entiers) donc le grand produit est donc P est pair

Exercice 4

On considère un entier naturel n.

1) Étudier la parité des nombres suivants :
   $A = 2n + 6 = 2(n + 3) = 2q$ avec $q = n + 3$ un entier (somme d'entiers) donc A est pair.
   $B = 6n + 8 = 2(3n + 4) = 2q$ avec $q = 3n + 4$ un entier (somme et produits d'entiers) donc B est pair.
   $C = 40n + 1 = 2(20n) + 1 = 2q + 1$ avec $q = 20n$ un entier (produits d'entiers) donc C est impair.
2) Montrer que $A + C$ est un multiple de 7.
   $A + C = 2n + 6 + 40n + 1 = 42n + 7 = 7(6n + 1) = 7q$ avec $q = 6n + 1$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $A + C$ est un multiple de 7.

Exercice 5
Pour tout entier naturel n montrer que $5n^2 + 3n$ est un nombre pair.
$5n^2 + 3n = n(5n + 3)$
Cas 1 : n est pair
Il existe donc un nombre entier k tel que $n = 2k$ et donc $5n^2 + 3n = 2k(5 \times 2k + 3) = 2q$ avec $q = 10k + 3$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $5n^2 + 3n$ est pair.
Cas 2 : n est impair
Il existe donc un nombre entier k tel que $n = 2k + 1$ et donc $5n^2 + 3n = (2k + 1)(5(2k + 1) + 3) =$
$(2k + 1)(10k + 5 + 3) = (2k + 1)2(5k + 3) = 2q'$ avec $q' = (2k + 1)(5k + 3)$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $5n^2 + 3n$ est pair.

Exercice 6
La somme de deux entiers consécutifs est-elle paire ou impaire ?
Soit deux entiers consécutifs, on appelle n le plus petit d'entre eux. La somme est donc $S = n + (n + 1) = 2n + 1$ avec n entier donc S est impaire.
Remarque : on aurait pu être tenté de faire l'étude suivant la parité de n, ça fonctionne mais c'est plus long.

Exercice 7
On considère un entier k. Déterminer la parité de $(k + 1)^2 - k^2$
$(k + 1)^2 - k^2 = (k + 1 - k)(k + 1 + k) = 1(2k + 1) = 2k + 1$ or k est un entier donc cette expression est impaire.

Exercice 8 Difficulté +
Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
Soit n un nombre impair, il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$
$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1)$
$k(k + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc d'après le cours ce nombre est pairs et donc il peut s'écrire sous la forme $2q$ avec q un entiers.
Ainsi $n^2 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$ donc le résultat de la division euclidienne de n^2 par 8 est 1.

Exercice 9 Difficulté +
Comme a et b sont deux entiers naturels impairs il existe k et k' deux entiers tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$.
Ainsi $N = a^2 + b^2 + 6 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 + 6 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 6$
$= 4k^2 + 4k + 4k'^2 + 4k' + 8 = 4k(k + 1) + 4k'(k' + 1) + 8$
$k(k + 1)$ et $k'(k' + 1)$ sont des produits de deux entiers consécutifs donc d'après le cours ces nombres sont pairs et donc ils peuvent s'écrire respectivement sous la forme $2q$ et $2q'$ avec q et q' deux entiers.
Ainsi : $N = 4 \times 2q + 4 \times 2q' + 8 = 8(q + q' + 1) = 8q''$ avec $q'' = q + q' + 1$ un entier en tant que somme d'entiers. N est donc multiple de 8 (est divisible par 8).

Exercice 10
1) 7+8+9+10=34 j'ai l'impression que la somme est paire.
2) Les quatre entiers sont n, $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$
3) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$
   $= n + n + 1 + n + 2 + n + 3$
   $= 4n + 6 = 2 \times 2n + 2 \times 3$
   $= 2(2n + 3)$
   $= 2k$avec $k = 2n + 3$ un entier donc n est pair

Exercice 75P54
1) Supposons que n est pair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. On aura alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k'$ avec $k' = k^2$ un entier naturel donc n^2 est divisible par 4.
2) Supposons maintenant que n est impair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n =$ $2k$+1.

On aura alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k' + 1$ avec $k' = k^2 + k$ un entier naturel donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 4.

Aide pour l'exercice 76P54

Pour faire cet exercice on peut suivre les raisonnements habituels

Par exemple pour la question 1a :

Comme a est pair alors $a = 2k_a$ avec k_a un entier

Comme b est impair alors $b = 2k_b + 1$ avec k_b un entier

Ainsi $2a + 3b = 2(2k_a) + 3(2k_b + 1) = 4k_a + 6k_b + 3 = 4k_a + 6k_b + 2 + 1$

$= 2 \times 2k_a + 2 \times 3k_b + 2 \times 1 + 1 = 2(2k_a + 3k_b + 1) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k_a + 3k_b + 1$ un entier, donc $2a + 3b$ est un nombre impair.

Je vous propose pour changer un peu de recycler ce qui a été vu durant la première semaine passée à travailler sur la parité

On admettra les résultats déjà prouvés en cours :

1) Le produit de deux pairs est un pair.
2) Le produit de deux impairs est un impair.
3) Le produit d'un nombre pair par un impair est un nombre pair.
4) La somme (ou la différence) de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est un nombre pair.
5) La somme (ou la différence) d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Au travail !

1) Supposons que a est pair et b est impair.
   a. 2 est pair et a aussi donc d'après la propriété 1, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.

Exercice 76P54

On admettra les résultats déjà prouvés en cours :

1) Le produit de deux pairs est un pair.
2) Le produit de deux impairs est un impair.
3) Le produit d'un nombre pair par un impair est un nombre pair.
4) La somme (ou la différence) de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est un nombre pair.
5) La somme (ou la différence) d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Au travail !

1) Supposons que a est pair et b est impair.
   a. 2 est pair et a aussi donc d'après la propriété 1, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est pair donc d'après la propriété 1 donc a^2 est pair
      b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
      Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 5 est impair.
   c. 9 est impair et a est pair donc d'après la propriété 3, $9a$ est pair
      4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
      et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est pair.
2) Supposons que a et b sont impair.
   a. 2 est pair et a est impair aussi donc d'après la propriété 3, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est impair donc d'après la propriété 2 donc a^2 est impair
      b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
      Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 4 est pair.
   c. 9 est impair et a est impair donc d'après la propriété 2, $9a$ est impair
      4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
      et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est impair.