Correction de la fiche d'exercice sur les vecteurs dans un repère

Exercice 19P185

$\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}=\overrightarrow{AB}\binom{5-1}{-1-3}=\overrightarrow{AB}\binom{4}{-4}$, $\overrightarrow{AC}\binom{2}{2}$, $\overrightarrow{AD}\binom{6}{-2}$, $\overrightarrow{BC}\binom{-2}{6}$, $\overrightarrow{BD}\binom{2}{2}$, $\overrightarrow{CD}\binom{4}{-4}$

On a donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et donc ABDC qui est un parallélogramme.

On a $\overrightarrow{AD}\neq\ \overrightarrow{BC}$ donc ADCB n'est pas un parallélogramme.

On a $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{DB}$ donc ACBD n'est pas un parallélogramme.

Exercice 20P185

$\overrightarrow{AB}\binom{4}{-4}$ et $\overrightarrow{DC}\binom{2-x}{5-y}$ si on veut que ABCD soit un parallélogramme il nous faut avoir $\overrightarrow{AB}\binom{4}{-4}=\overrightarrow{DC}\binom{2-x}{5-y}$ et donc

$\begin{cases}4\ =\ 2-\ x\\-4\ =\ 5-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ =\ 2-4x\\y\ =\ 5+4\end{cases}$ ainsi on a : $D(-2;9)$

Exercice 23P186

$\vec{v}=3t\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\vec{v}\binom{3t}{0}$

$\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow$ t-7= 0 et 4-m = 0 $\Leftrightarrow$ t = 7 et 4 = m

$\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow$ 3t = 0 $\Leftrightarrow$ t = 0

$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow$ t-7 = 3t et 4-m = 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}-7\ =\ 2t\\m\ =\ 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ =\ -3{,}5\\m\ =\ 4\end{cases}$

Exercice 26P186

$\overrightarrow{AB}\binom{-3}{2}$, $\overrightarrow{AC}\binom{-1}{-3}$

Si M a pour coordonnées (x ;y) alors $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-1}$, $\overrightarrow{BM}\binom{x+1}{y-3}$ et donc $\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)\binom{2x-1}{2y-4}$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\binom{-3}{2}=\binom{2x-1}{2y-4}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=2x-1\\2=2y-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=x\\3=y\end{cases}$

Exercice 29P187

$\overrightarrow{f_1}\binom{2}{1}$, $\overrightarrow{f_2}\binom{-2}{6}$ donc $\left(\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}\right)\binom{0}{7}$

On veut que les trois forces se compensent donc que la somme des trois donne $\vec{0}$, ou encore que $\overrightarrow{f_3}$ soit l'opposée de $\left(\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}\right)$ donc $\overrightarrow{f_3}\binom{0}{-7}$.

Exercice 32P187

a) $\vec{u}=1\vec{\imath}+0\vec{\jmath}$ b) $\vec{v}=0\vec{\imath}+0\vec{\jmath}$ c) $\vec{u}=\frac{7}{2}\vec{\imath}-\frac{3}{4}\vec{\jmath}$

Exercice 43P188

a) $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{1}$, $\overrightarrow{AC}\binom{3}{-1}$, $\overrightarrow{BC}\binom{6}{-2}$

b) $2\overrightarrow{AB}\binom{-6}{2}$, $-\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\binom{1{,}5}{-0{,}5}$, $-\overrightarrow{AC}\binom{-3}{1}$, $2\overrightarrow{BC}\binom{12}{-4}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\\frac{-4}{3}\end{pmatrix}$

c) $\left(2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\binom{-4{,}5}{1{,}5}$; $\left(-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\right)\binom{15}{-5}$, $\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\begin{pmatrix}-5\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

Exercice 45P188

$\overrightarrow{AB}\binom{7}{2}$, $\overrightarrow{AC}\binom{6}{1}$ donc $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\binom{13}{3}$ donc $\left(\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right)\binom{19{,}5}{4{,}5}$

$\overrightarrow{AM}\binom{x-(-5)}{y-(-3)}=\overrightarrow{AM}\binom{x+5}{y+3}$ donc $\overrightarrow{AM}\binom{x+5}{y+3}=\left(\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right)\binom{19{,}5}{4{,}5}\Leftrightarrow\begin{cases}19{,}5=x+5\\4{,}5=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14{,}5=x\\1{,}5=y\end{cases}$

Donc M a pour coordonnées (14,5 ;1,5)

Exercice 52P189

a) $|\vec{u};\vec{v}| = 6 - 6 = 0$ donc les vecteurs sont colinéaires ; b) $|\vec{u};\vec{v}| = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

c) $|\vec{u};\vec{v}| = 1 - 1 = 0$ donc les vecteurs sont colinéaires; d) $|\vec{u};\vec{v}| = 1 + 1 \neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

e) $|\vec{u};\vec{v}| = (\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)1 = 3\sqrt{2} + 2 - 3 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} \neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 53P189

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un nombre réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

On a donc $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \alpha(\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC})$ et donc

$(2-\alpha)\overrightarrow{AB} = (1 + x\alpha)\overrightarrow{AC}$ or ABC est un triangle donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires on doit donc avoir $\begin{cases}(2-\alpha) = 0\\(1+x\alpha) = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\(1+x\alpha) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\1 + 2x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\x = \frac{-1}{2}\end{cases}$

Ainsi pour que les vecteurs soient colinéaires on doit nécessairement avoir $x = \frac{-1}{2}$ et dans ce cas $\vec{u} = 2\vec{v}$

Exercice 54P189

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un nombre réel μ tel que $\vec{u} = \mu\vec{v}$

On a donc $\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{3}{4}\vec{\jmath}\right) = \mu(a\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et donc $\left(\frac{1}{2} - \mu a\right)\vec{\imath} = \left(\frac{3}{4} - \mu\right)\vec{\jmath}$ or les vecteurs $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires donc

$\begin{cases}\frac{1}{2} - \mu a = 0\\ \frac{3}{4} - \mu = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2} - \mu a = 0\\ \frac{3}{4} = \mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2} - \frac{3}{4}a = 0\\ \frac{3}{4} = \mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}a\\ \frac{3}{4} = \mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3} = a\\ \frac{3}{4} = \mu\end{cases}$

Exercice 55P189

a) $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires ⇔ $|\vec{u};\vec{v}| = 0$ ⇔ 25+2k = 0 ⇔ k = -12,5

b) $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires ⇔ $|\vec{u};\vec{v}| = 0$ ⇔ 10-3k² = 0 ⇔ k² = $\frac{10}{3}$ ⇔ k = $\sqrt{\frac{10}{3}}$ ou $-\sqrt{\frac{10}{3}}$

b) $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires ⇔ $|\vec{u};\vec{v}| = 0$ ⇔ k²4$\sqrt{2}$+15k = 0 ⇔ k(k4$\sqrt{2}$-15) = 0 ⇔ k = 0 ou $\frac{15}{4\sqrt{2}}$ ⇔ k = 0 ou $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

Deuxième voie : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BC}$

Ce point E me gène, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$ donc C est le milieu de [AD]

Exercice 72P190

$\overrightarrow{AB}\binom{3}{-2}$, $\overrightarrow{AC}\binom{-9}{6}$ pour savoir si les points sont alignés il me suffit de voir si les deux vecteurs sont colinéaires, ici on voit facilement que -3$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Si on a besoin de lunettes on peut aussi faire le calcul $3 \times 6 - (-2)(-9) = 18 - 18 = 0$

Exercice 74P190

On pose M($x_M; y_M$) $\overrightarrow{CM}\binom{x_M+4}{y_M+2} = x\vec{u}\binom{2x}{5x}$ et on a donc $\begin{cases}x_M+4=2x\\y_M+2=5x\end{cases}$ on aura donc facilement M(2x-4 ;5x-2)

Et donc $\overrightarrow{AM}\binom{2x-4-3}{5x-2-7}$, $\overrightarrow{AM}\binom{2x-7}{5x-9}$

Pour que M soit sur (AB) il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{-5}$ soient colinéaires donc que (2x-7)(-5)-(5x-9)5 = 0
⇔ -10x+35 – 25x +45= 0 70 = 35x donc x = 2