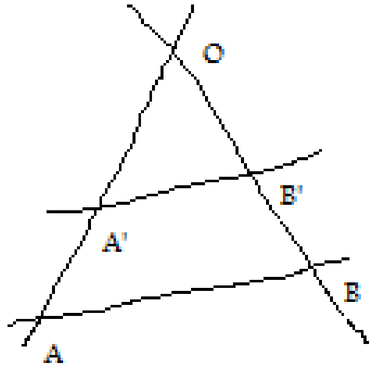
# Thalès : le théorème, sa réciproque et sa contraposée




**Exercice 1** déterminer les mesures manquantes

La figure à droite n'est pas à l'échelle, elle est là à titre indicatif.

On va observer deux situations : a) et b), pour chacune d'elle les mesures des triangles seront différentes, par contre pour les deux on aura : (AB) // (A'B')

a) sachant que OA = 5cm , OA' = 7,5cm, OB' = 9cm et AB = 4cm Déterminez les mesures des segments [A'B'] et [OB].

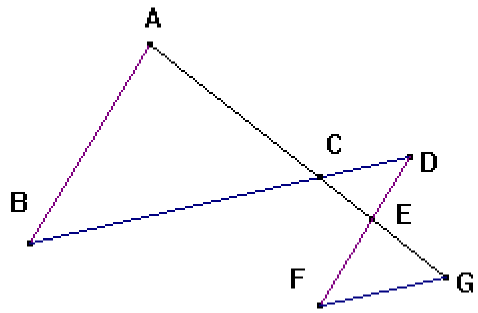
b) sachant que A'B' = 5cm , OA' = 7,5cm, OB = 5cm et AB = 4cm, Déterminez les mesures des segments [OB'] et [OA].

**Exercice 2** (AB) et (A'B') , sécantes ou parallèles ?

On utilisera la figure de l'exercice précédent comme support, cette fois ci on ne sait pas si les droites (AB) et (A'B') sont parallèles, en fait c'est l'objet de l'exercice : déterminer si ces deux droites sont parallèles dans chacun des cas présentés.

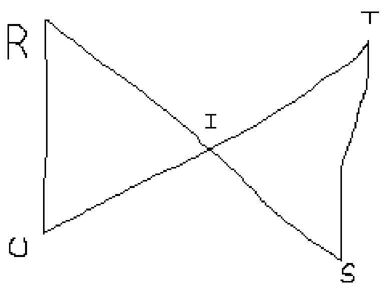
a) OA' = 4cm OA = 5,2cm OB = 6,5cm et OB' = 5cm
b) OA'= 3cm OA = 5cm OB' = 4cm et OB = 3,3cm

**Exercice 3** déterminer des mesures manquantes




Déterminer les mesures de [AB], [BC], [EF] et [FG] sachant que :
AC=23cm CD =15cm CE=10cm EG=8cm
DE = 7,5cm et que :
(AB) // (DF) et (BD) // (FG)

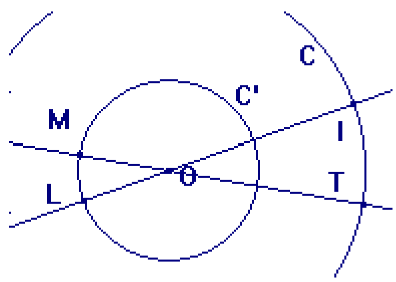
**Exercice 4** réciproque du théorème de Thalès et équations




Pour chaque cas déterminer pour quelle valeur de x les droites (RU) et (TS) sont parallèles.

a) TI = 10m, IU = 14m, IS = 15m et IR = (16 + x) m
b) RI = 7cm, IS = 14cm, IU = (x +2) cm, IT = (3x) cm
c) RI = $x$ mm, IU = $(18 - x)$ mm, IS= 5 mm, IT=4mm

**Exercice 5** réciproque du théorème de Thalès




Les cercles C et C' sont concentriques de centre O et de rayons respectifs r et r'

1) Les droites (LM) et (TI) sont-elles parallèles ?
2) Les droites (LT) et (MI) sont-elles parallèles

# Correction Thalès

**Exercice 1** déterminer les mesures manquantes

a) Les points A, O et A' sont alignés et O, B et B' aussi, de plus $(AB)//(A'B')$ donc d'après le théorème de Thalès on aura : $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{7{,}5}{5}=\frac{9}{OB}=\frac{A'B'}{4}$ donc on aura :

$\frac{7{,}5}{5}=\frac{9}{OB} \Leftrightarrow OB=\frac{5\times9}{7{,}5}=6\text{cm}$ et $\frac{7{,}5}{5}=\frac{A'B'}{4} \Leftrightarrow A'B'=\frac{7{,}5\times4}{5}=6\text{cm}$

b) Les points A, O et A' sont alignés et O, B et B' aussi, de plus $(AB)//(A'B')$ donc d'après le théorème de Thalès on aura : $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{7{,}5}{OA}=\frac{OB'}{5}=\frac{5}{4}$ donc on aura :

$\frac{OB'}{5}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow OB'=\frac{5\times5}{4}=6{,}25\text{cm}$ et $\frac{7{,}5}{OA}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow OA=\frac{7{,}5\times4}{5}=6\text{cm}$

**Exercice 2** <u>(AB) et (A'B') , sécantes ou parallèles ?</u>

a) $\frac{OA'}{OA}=\frac{4}{5{,}2}=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$ et $\frac{OB'}{OB}=\frac{5}{6{,}5}=\frac{50}{65}=\frac{10}{13}$ donc $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$ de plus O, A' et A d'une part et O, B' et B d'autre part sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (AB)//(A'B').

b) $\frac{OA'}{OA}=\frac{3}{5}=0{,}6$ et $\frac{OB'}{OB}=\frac{4}{3{,}3}\approx 1{,}21 \neq \frac{OA'}{OA}$

donc d'après le théorème de Thalès (ou sa contraposée) les droites (AB) et (A'B') ne sont pas parallèles.

**A retenir :** si on l'égalité entre les quotients la réciproque de Thalès nous permet de dire que les droites sont parallèles, si l'égalité est fausse alors on utilisera le théorème de Thalès (ou sa contraposée) pour conclure que les droites ne sont pas parallèles.

**Exercice 3** <u>déterminer des mesures manquantes</u>

$\begin{cases} \text{A, C et E alignés} \\ \text{B, C et D alignés} \\ (AB)//(DE) \end{cases}$ donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{DE} \Leftrightarrow \frac{23}{10}=\frac{BC}{15}=\frac{AB}{7{,}5}$

On a donc $\frac{23}{10}=\frac{BC}{15}$ donc $BC=\frac{23\times15}{10}=34{,}5\text{cm}$ et $\frac{23}{10}=\frac{AB}{7{,}5}$ donc $AB=\frac{23\times7{,}5}{10}=17{,}25\text{cm}$

$\begin{cases} \text{C, E et G alignés} \\ \text{D, E et F alignés} \\ (AB)//(DE) \end{cases}$ donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{CE}{EG}=\frac{DE}{EF}=\frac{CD}{FG} \Leftrightarrow \frac{10}{8}=\frac{7{,}5}{EF}=\frac{15}{FG}$

On a donc $\frac{10}{8}=\frac{7{,}5}{EF}$ donc $EF=\frac{8\times7{,}5}{10}=6\text{cm}$ et $\frac{10}{8}=\frac{15}{FG}$ donc $FG=\frac{8\times15}{10}=12\text{cm}$

**Exercice 4** <u>réciproque du théorème de Thalès et équations</u>

a)

je veux avoir $\frac{IR}{IS}=\frac{IU}{IT} \Leftrightarrow \frac{16+x}{15}=\frac{14}{10} \Leftrightarrow \frac{16+x}{15}\times15\times10=\frac{14}{10}\times15\times10$

$\Leftrightarrow (16+x)10=14\times15 \quad \Leftrightarrow 160+10x=210 \Leftrightarrow 160+10x-160=210-160$

$\Leftrightarrow 10x=50 \Leftrightarrow x=\frac{50}{10} \Leftrightarrow x=5$

Ainsi avec $x=5cm$ on aura $\frac{IR}{IS}=\frac{IU}{IT}$

De plus R,I,S d'une part et U,I,T d'autre part sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on a (RU)//(TS)

b)

Je veux avoir (E) $\frac{IR}{IS} = \frac{IU}{IT} \Leftrightarrow \frac{7}{14} = \frac{x+2}{3x}$

Recherche du domaine d'étude, à commencer par la ou les valeurs interdites :

$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi $D_e = \mathbb{R} - \{0\}$

Sur $D_e$, (E) $\Leftrightarrow \frac{7}{14} \times 14 \times 3x = \frac{x+2}{3x} \times 14 \times 3x \Leftrightarrow 7 \times 3x = (x+2)14$

$\Leftrightarrow 21x = 14x + 28 \Leftrightarrow 21x - 14x = 14x + 28 - 14x$

$\Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow \frac{7x}{7} = \frac{28}{7} \Leftrightarrow x = 4$ or $4 \in D_e$ donc c'est une valeur acceptable.

Ainsi avec $x = 4cm$ on aura $\frac{IR}{IS} = \frac{IU}{IT}$

De plus R,I,S d'une part et U,I,T d'autre part sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on a (RU)//(TS)

c)

Je veux avoir (E) $\frac{IR}{IS} = \frac{IU}{IT} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{18-x}{4}$

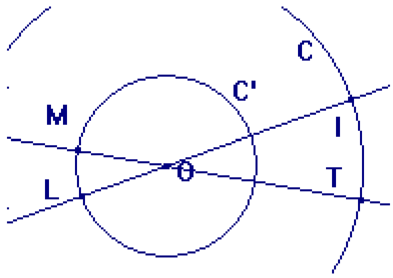
$\Leftrightarrow \frac{x}{5} \times 4 \times 5 = \frac{18-x}{4} \times 4 \times 5 \Leftrightarrow 4x = (18-x)5$

$\Leftrightarrow 4x = 90 - 5x \Leftrightarrow 4x + 5x = 90 - 5x + 5x \Leftrightarrow 9x = 90 \Leftrightarrow \frac{9x}{9} = \frac{90}{9} \Leftrightarrow x = 10$

Ainsi avec $x = 10cm$ on aura $\frac{IR}{IS} = \frac{IU}{IT}$

De plus R,I,S d'une part et U,I,T d'autre part sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on a (RU)//(TS)

**Exercice 5** <u>réciproque du théorème de Thalès</u>




Les cercles C et C' sont concentriques de centre O et de rayons respectifs r et r'

3) Les droites (LM) et (TI) sont-elles parallèles ?
4) Les droites (LT) et (MI) sont-elles parallèles

1)

$\frac{OL}{OI} = \frac{r'}{r}$ et $\frac{OM}{OT} = \frac{r'}{r}$ donc $\frac{OL}{OI} = \frac{OM}{OT}$ de plus M,O,T d'une party et L,O,I sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on aura (LM)//(IT)

2)

En regardant la figure on a l'impression que les droites sont sécantes. A-t-on raison ?

$\frac{OL}{OI} = \frac{r'}{r}$ et $\frac{OT}{OM} = \frac{r}{r'}$ ces quotients semblent différents. Sous quelles conditions ne le seraient-ils pas ?

$(E_p)\ \frac{r'}{r} = \frac{r}{r'} \Leftrightarrow \frac{r'}{r} rr' = \frac{r}{r'} rr' \ \Leftrightarrow r'^2 = r^2 \Leftrightarrow r'^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow (r'-r)(r'+r) = 0$

On reconnait une équation produit nul

$(E_p) \Leftrightarrow r' - r = 0$ ou $r' + r = 0 \Leftrightarrow r' = r$ ou $r' = -r$ Les rayons étant positifs la seconde possibilité n'a pas de sens dans la figure, donc à moins d'avoir deux cercles de même rayon donc confondus on n'aura pas $\frac{OL}{OI} = \frac{OM}{OT}$ et donc d'après le théorème de Thalès les deux droites (LT) et (MI) ne seront pas parallèles.