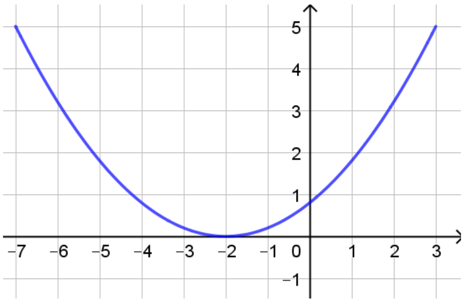
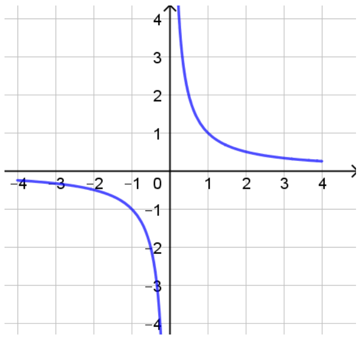
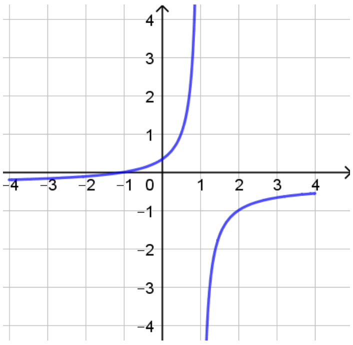
Tableaux de variation

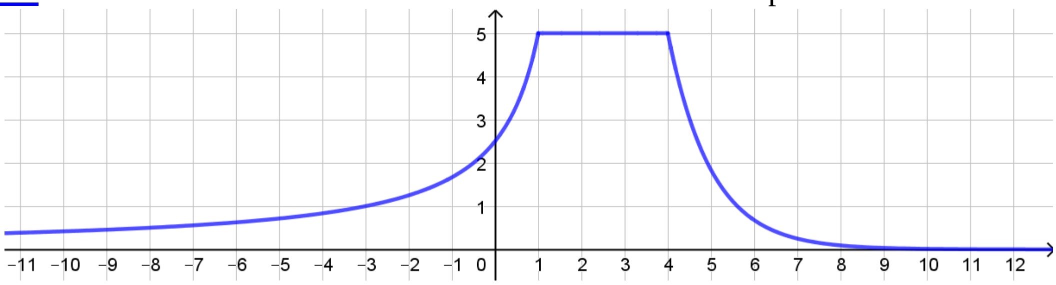
Exercice 6C.1 : Réaliser le tableau de variation de chacune des trois fonctions f présentées ci-dessous :

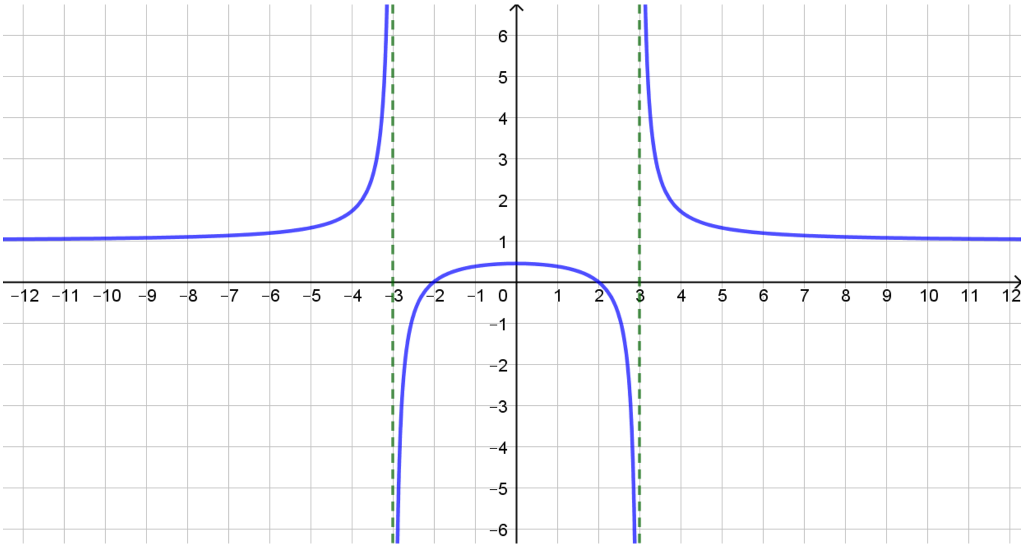


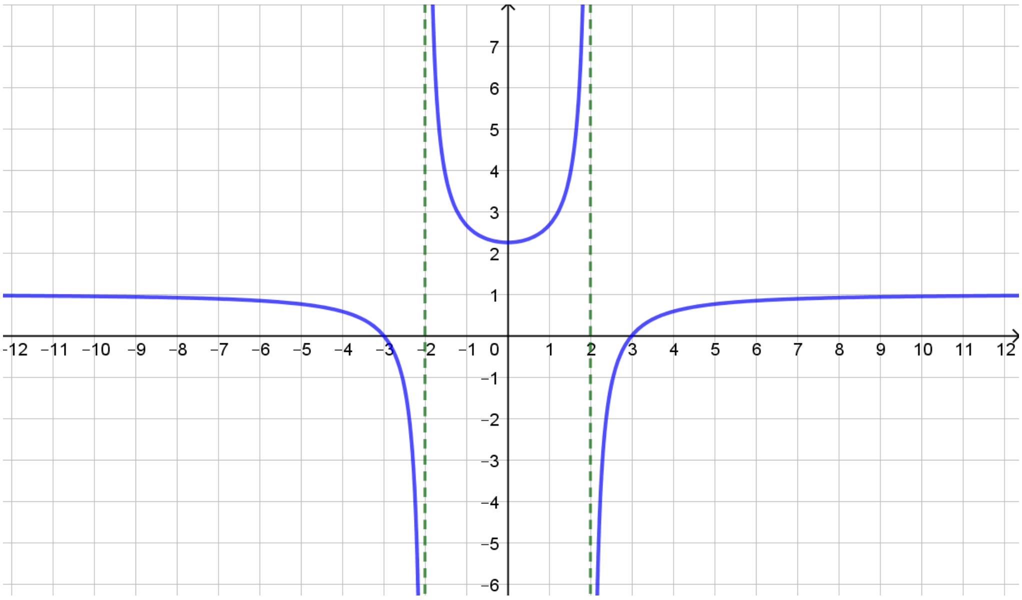




Exercice 6C.2 : Réaliser le tableau de variation des trois fonctions représentées ci-dessous :







Exercice 8A.1 :

Déterminer le maximum M et le minimum m des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

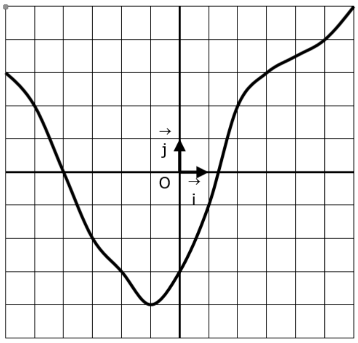


Figure 1

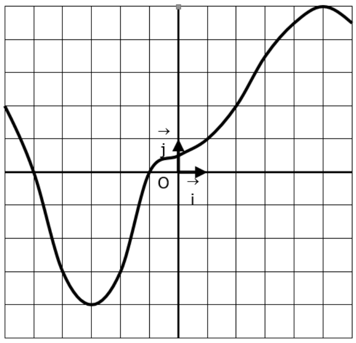


Figure 2

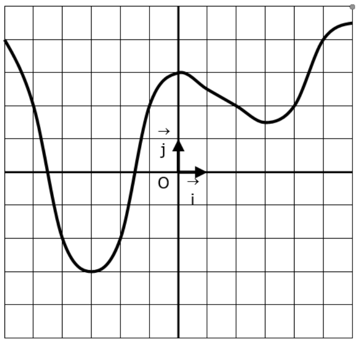


Figure 3

Sur $[-6;6]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

Sur $[-2;4]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

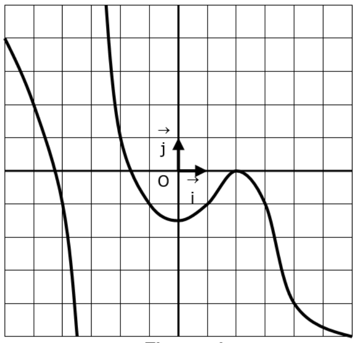


Figure 4

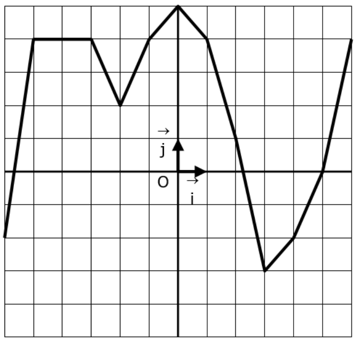


Figure 5

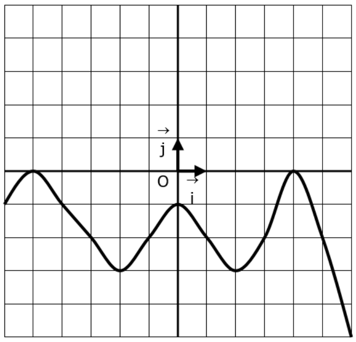


Figure 6

Sur $[-2;6]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

Sur $[-2;4]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

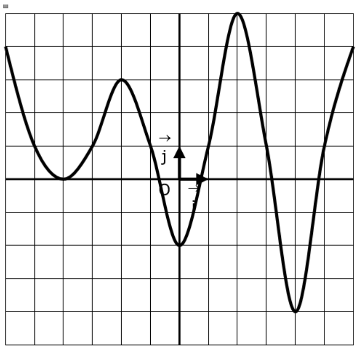


Figure 7

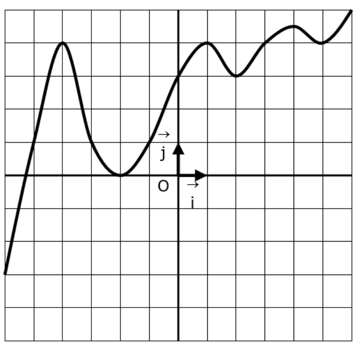


Figure 8

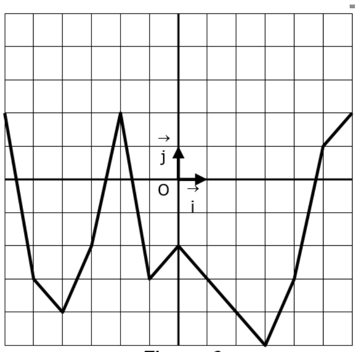


Figure 9

Sur $[-6;6]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

Sur $[-2;4]$: $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$ $M=.....$ et $m=.....$

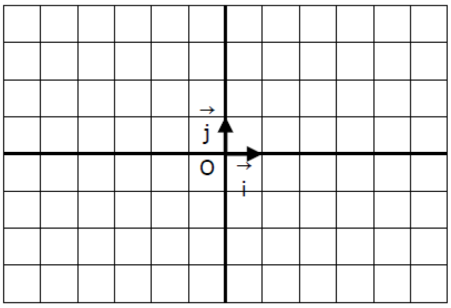
Exploiter un tableau de variations

Exercice 7B1

Construire dans chaque cas une des courbes qui correspond à ce tableau de variations.

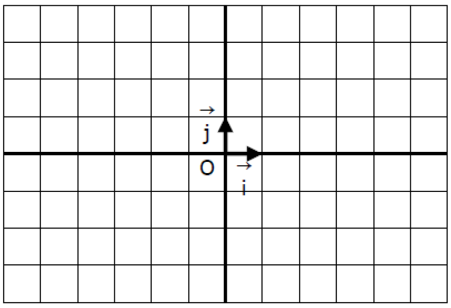
a.

x	-6		-3		0		2		6
$f(x)$	3	↘	0	↗	2	↘	-3	↗	1



b.

x	-6		-5		-1		1		4		5		6
g(x)	0	↗	1	↘	-4	↗	3	↘	2	↗	4	↘	0

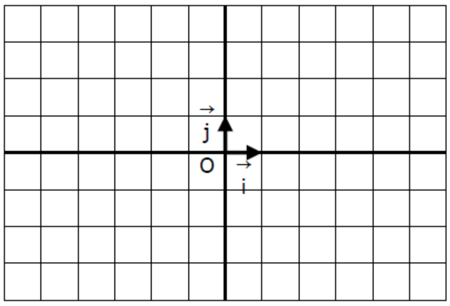


Exercice 7B2

Construire dans chaque cas une des courbes qui correspond aux renseignements fournis.

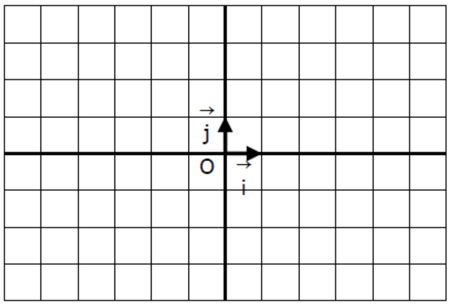
a. - L'image de 0 est 3 ;
- Les antécédents de 0 sont -2 et 3 ;
- Le tableau de variation de f est le suivant :

x	-6		-3		1		5		6
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	4	↘	-2	↗	-1



b. - L'équation g(x) = 2 a pour solutions : S = {-4 ; 1}
- L'inéquation g(x) ≤ -1 a pour solution l'intervalle [-3 ; 0]
- L'inéquation g(x) > 3 a pour solution l'intervalle]2 ; 5[
- Le tableau de variation de g est le suivant :

x	-6		-1		3		6
g(x)	3	↘	-4	↗	4	↘	2,5



Exercice 7B3

On ne connaît une fonction f que par son tableau de variation.

1) Pour chacune de ces affirmations dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse :

a. $f(-3) = 4$ b. $f(1) \geq f(3)$

c. $f(-1)$ est positif

e. $f(1) > 3$ f. $f(5)$ est négatif

g. $f(-3) < f(-2)$

h. Si $x \in [0\,;\,6]$, $f(x) \geq -3$

x	-4		-2		0		4		6
$f(x)$	1	↘	0	↗	3	↘	-3	↗	-1

2) montrer que -3 est le minimum de f sur $[0; 6]$ (**point méthode**)

3) comparer $f(-1)$ et $f(1)$.

Fiche d’exercices : fonctions

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[-5; 10]$ admettant le tableau de variations suivant.

x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	↘	1	↗	9	↘	3

Effectuer les comparaisons suivantes quand elles sont possibles après les avoir justifier.

a) $f(5)$ et $f(7)$

b) $f(2{,}5)$ et $f(3{,}5)$

c) $f(-5)$ et $f(10)$

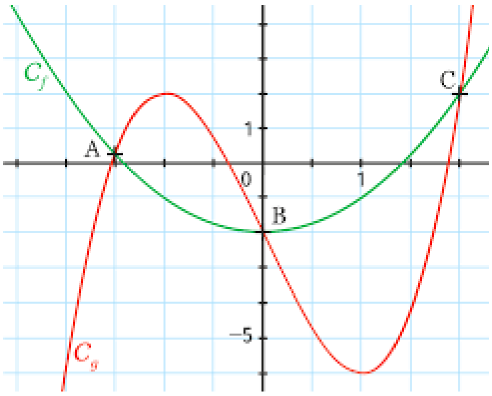
d) $f(-4)$ et $f(3)$

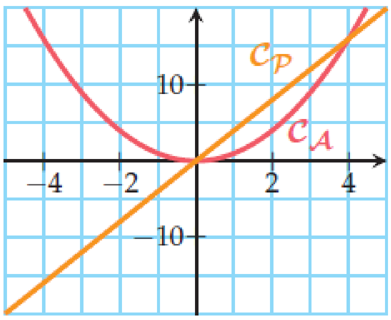
e) $f(-5)$ et $f(-3)$

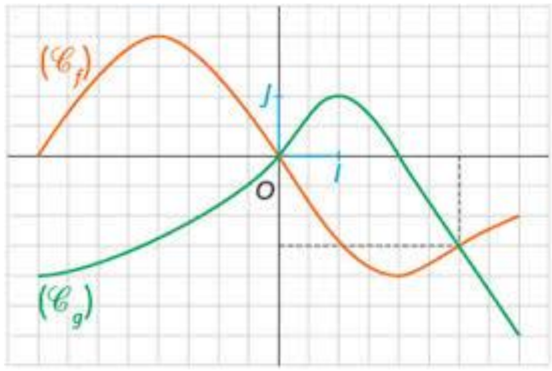
Exercice 3

1) Prouver que la fonction f qui a tout réel x associe le nombre $f(x) = 2x - 8$ est croissante sur $\mathbb{R}$ en utilisant la définition du cours.
2) Prouver que la fonction g qui a tout réel x associe le nombre $g(x) = -3x^2 + 1$ est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ en utilisant la définition du cours.

Exercice 4







Dans chacun des graphiques ci-dessus :

1) Résoudre $f(x) \geq g(x)$, et $g(x) > f(x)$ (pour celle au centre C_p représente f et C_A représente g)
2) Faire les tableaux de variations des deux fonctions

Exercice 5

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = -2x + 9$

$g(x) = 7 + 2x^2$

$h(x) = 8x^3 - 7x$

$i(x) = \frac{7}{8+x^2}$

$j(x) = 8 + 3\sqrt{x}$

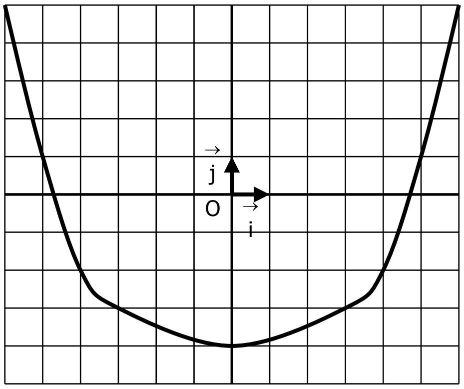
$k(x) = 8x - \frac{9}{x}$

$l(x) = \frac{8}{1-x^2}$

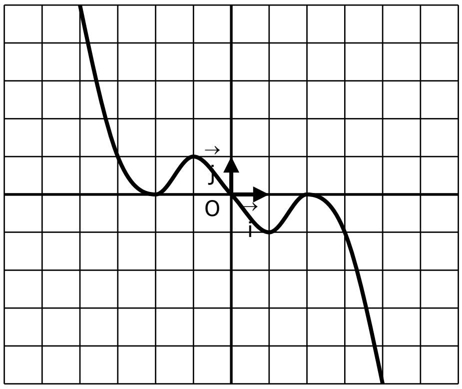
$m(x) = \frac{5x}{7+x^4}$

Parmi les fonctions suivantes, retrouver celles qui sont **paires**, celles qui sont **impaires**, et celles qui ne sont **ni paires ni impaires** :

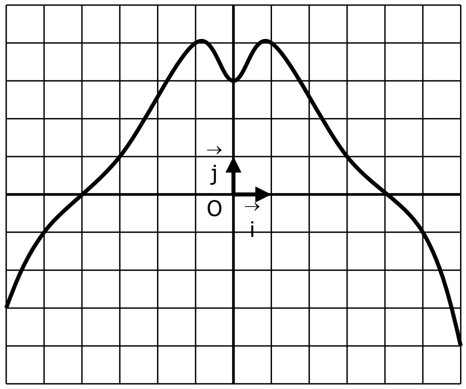
a.



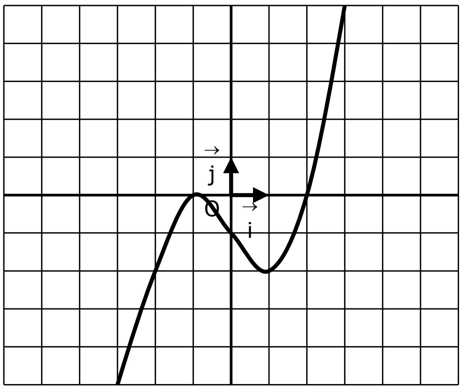
b.



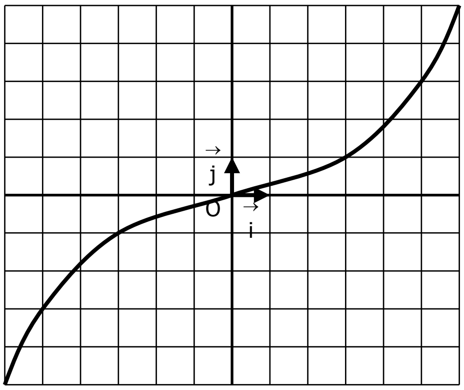
c.



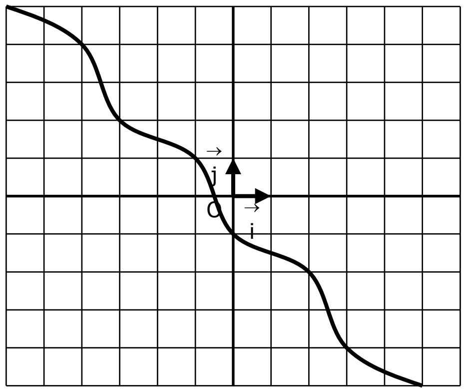
d.



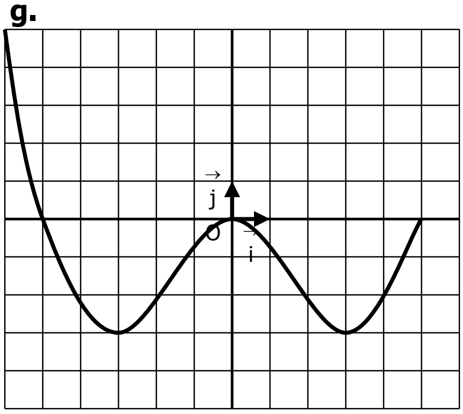
e.



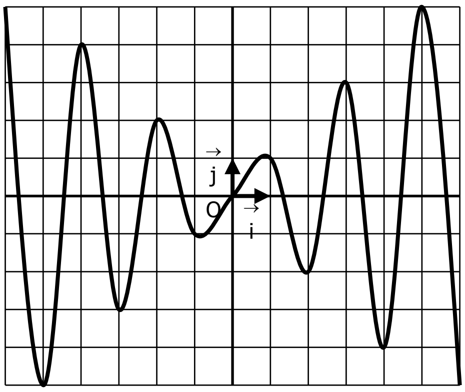
f.



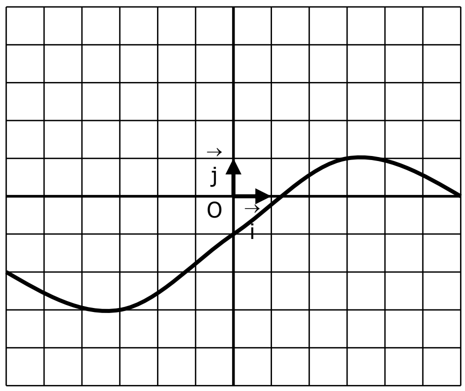
g.



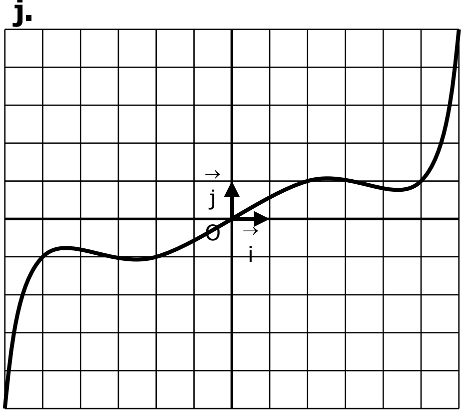
h.



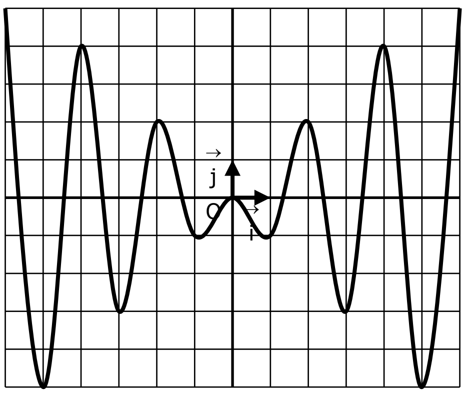
i.



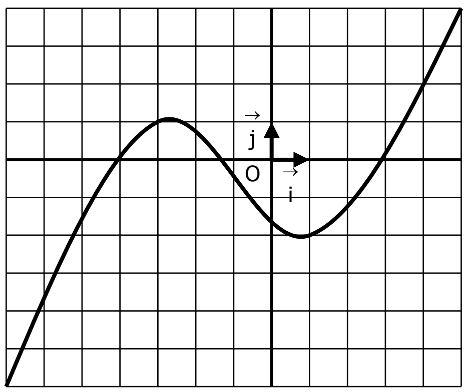
j.



k.



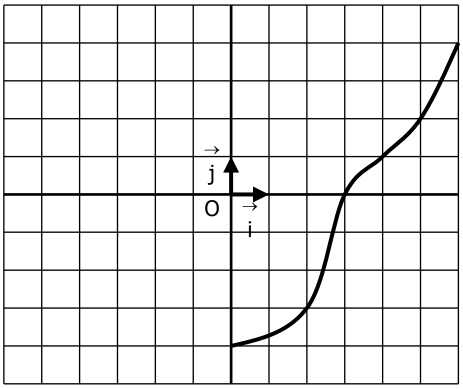
l.



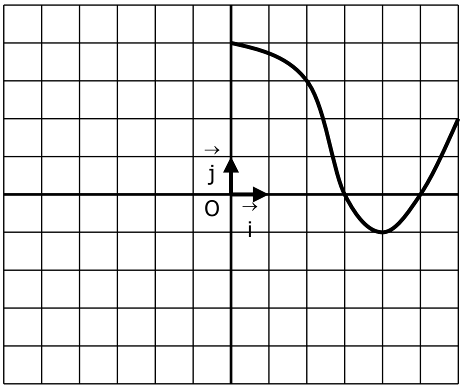
EXERCICE 7B.1

Les fonctions suivantes sont **paires**. Compléter leur représentation graphique.

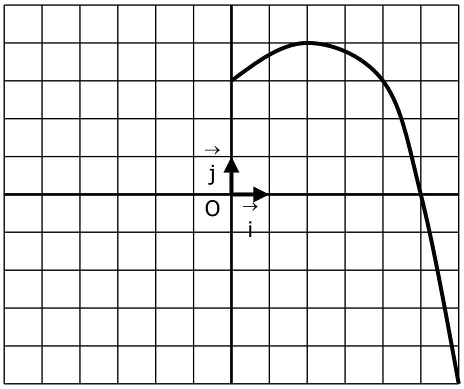
a.



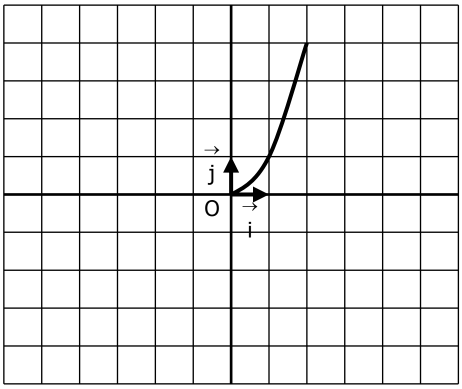
b.



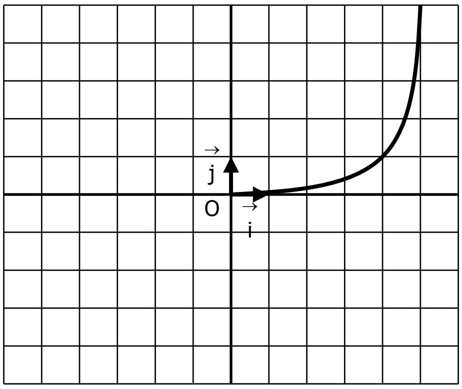
c.



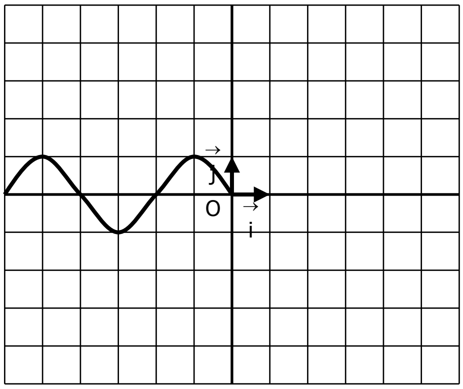
d.



e.



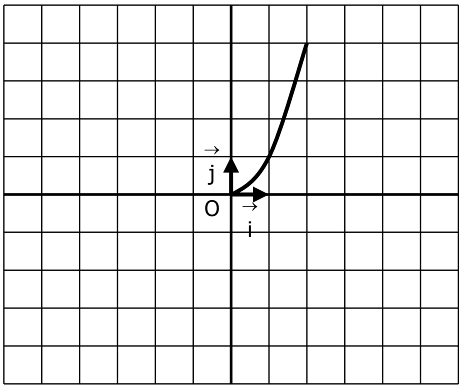
f.



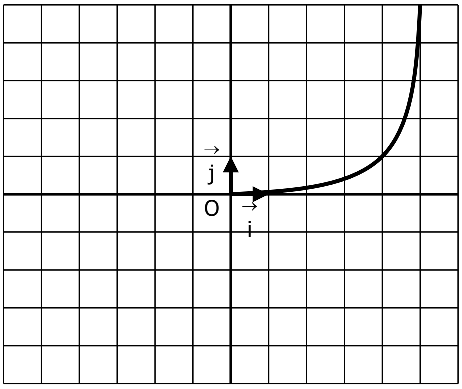
EXERCICE 7B.2

Les fonctions suivantes sont **impaires**. Compléter leur représentation graphique.

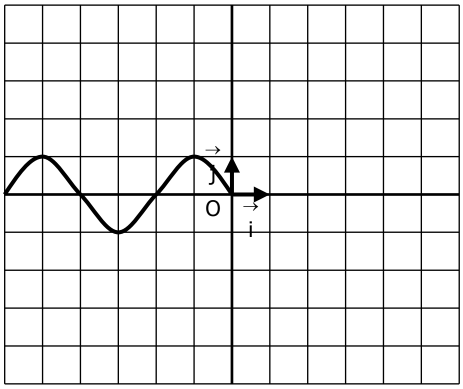
a.



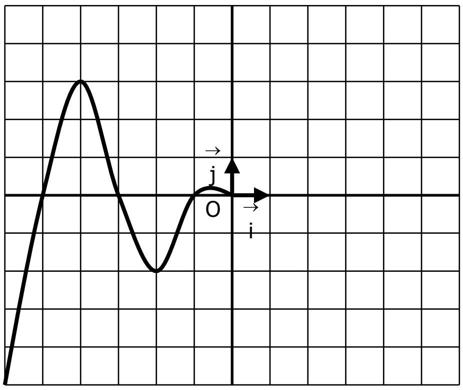
b.



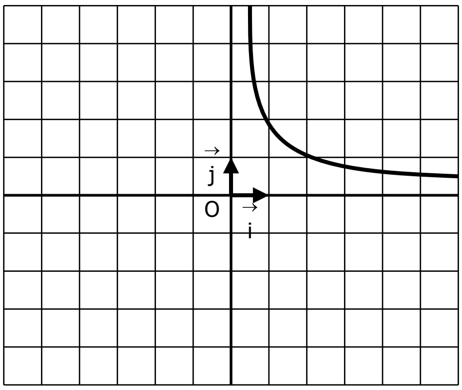
c.



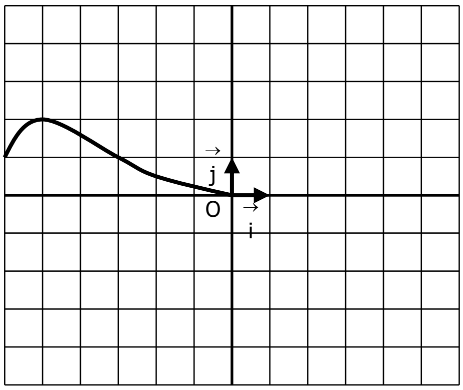
d.



e.

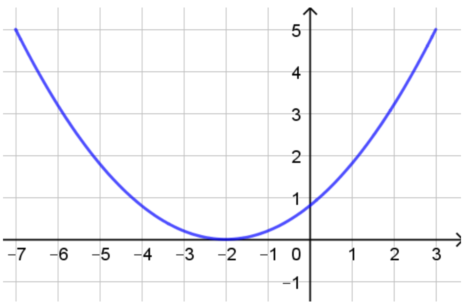


f.

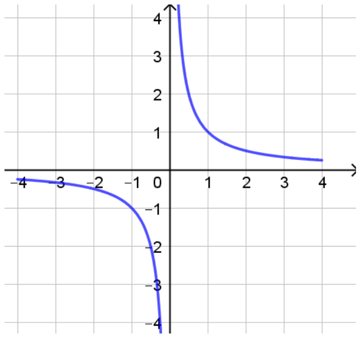


CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

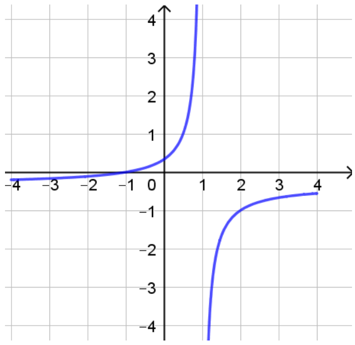
Exercice 6C.1 : *Réaliser le tableau de variation de chacune des trois fonctions f présentées ci-dessous :*



x	-7		-2		3
f	5	↘	0	↗	5

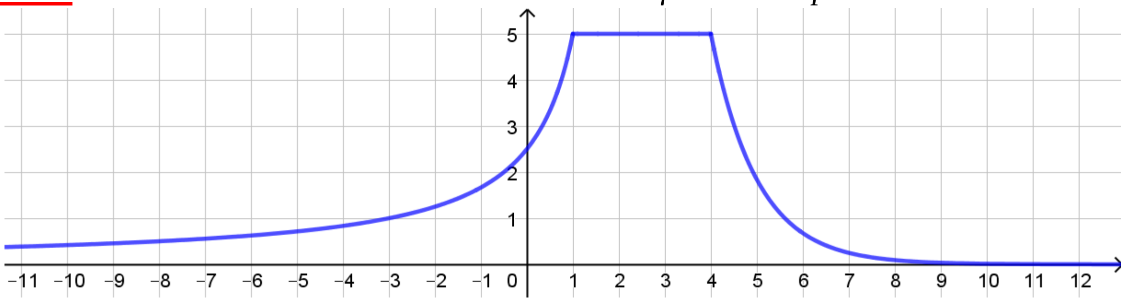


x	-4		0		4
f	$-0,2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$0,2$

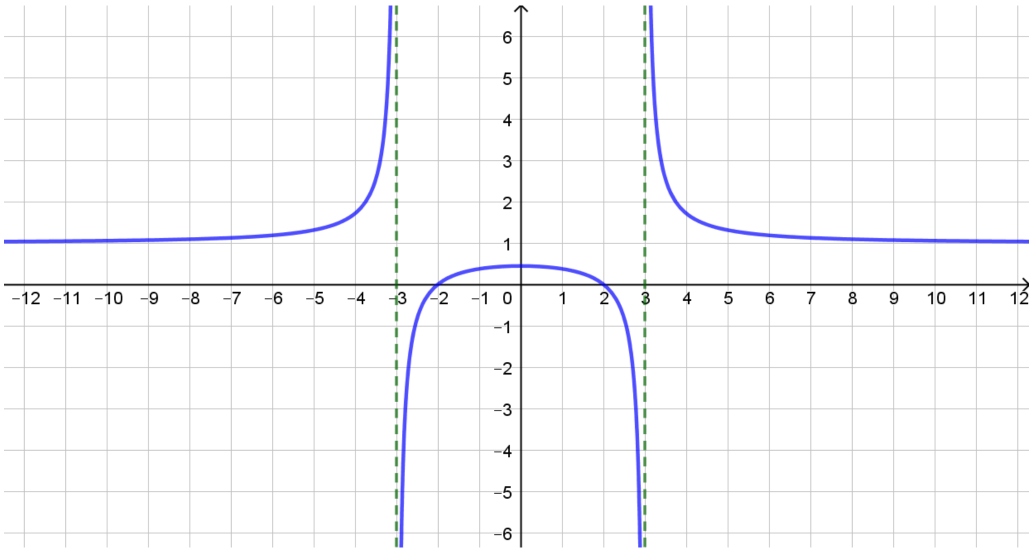


x	-4		1		4
f	$-0,2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-0,5$

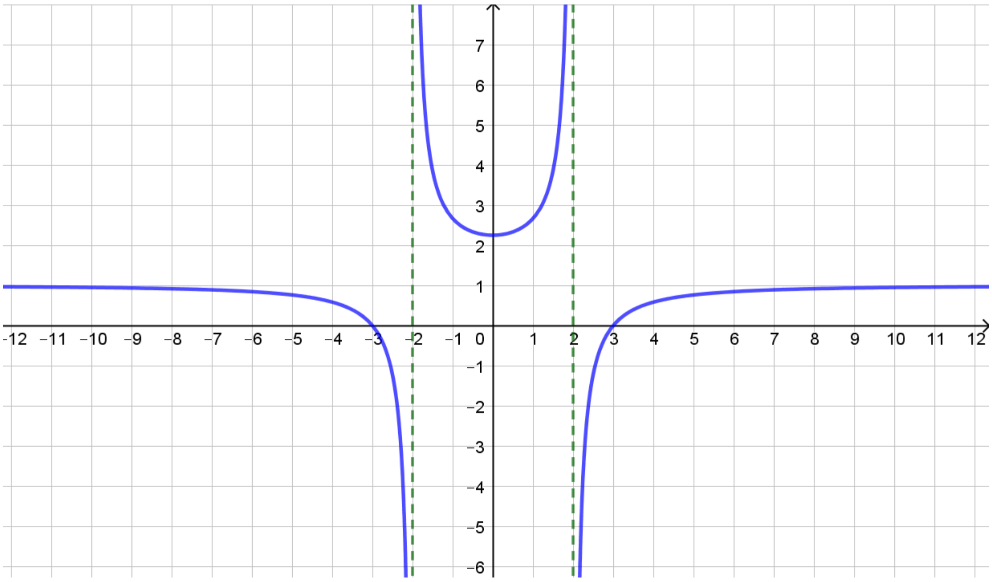
Exercice 6C.2 : *Réaliser le tableau de variation des trois fonctions représentées ci-dessous :*



x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f	0	↗	5	→	5	↘	0



x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$0,5$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$2,25$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 8A.1 :

Déterminer le maximum et le minimum des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

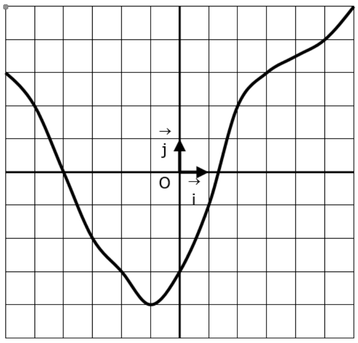


Figure 1

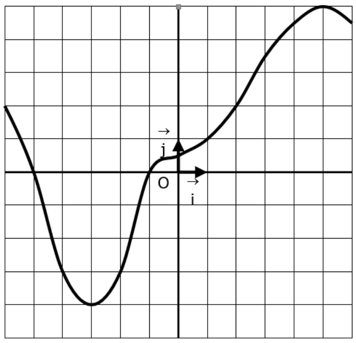


Figure 2

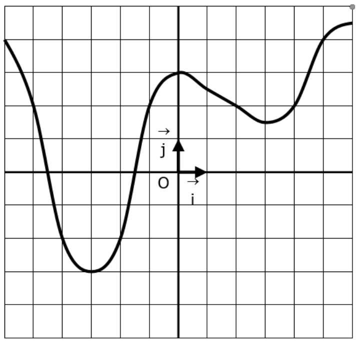


Figure 3

Sur $[-6;6]$: $M=5$ et $m=-4$ $M=5$ et $m=-4$ $M=4,5$ et $m=-3$

Sur $[-2;4]$: $M=3,5$ et $m=-4$ $M=4,5$ et $m=-3$ $M=3$ et $m=-2$

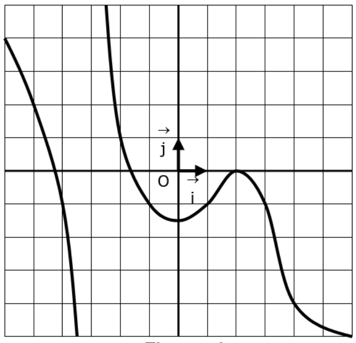


Figure 4

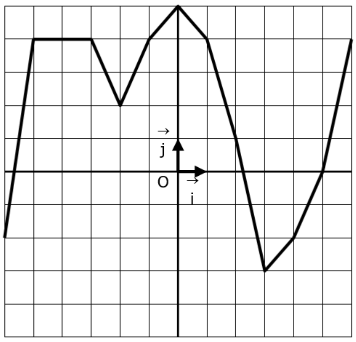


Figure 5

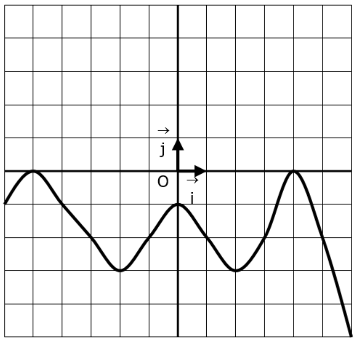


Figure 6

Sur $[-2;6]$: $M=1$ et $m=-5$ $M=5$ et $m=-3$ $M=0$ et $m=-5$

Sur $[-2;4]$: $M=1$ et $m=-4$ $M=5$ et $m=-3$ $M=0$ et $m=-3$

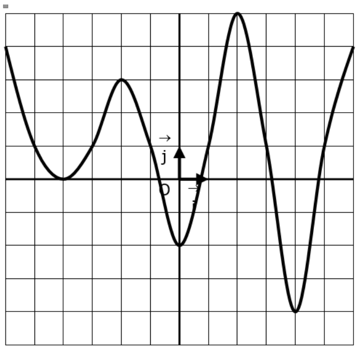


Figure 7

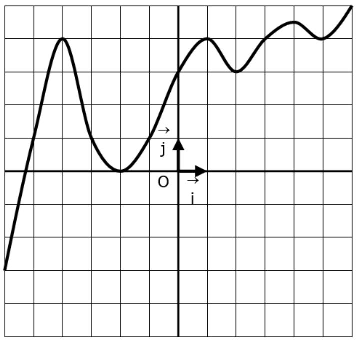


Figure 8

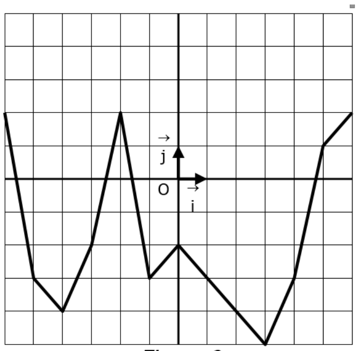


Figure 9

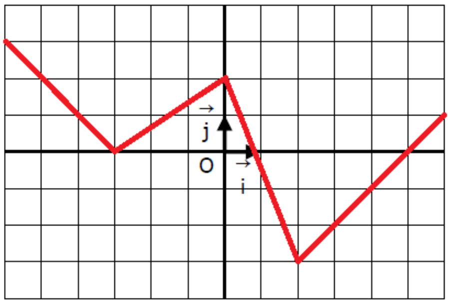
Sur $[-6;6]$: $M=5$ et $m=-4$ $M=5$ et $m=-3$ $M=2$ et $m=-5$

Sur $[-2;4]$: $M=5$ et $m=-4$ $M=4,5$ et $m=0$ $M=2$ et $m=-5$

Exercice 7B1

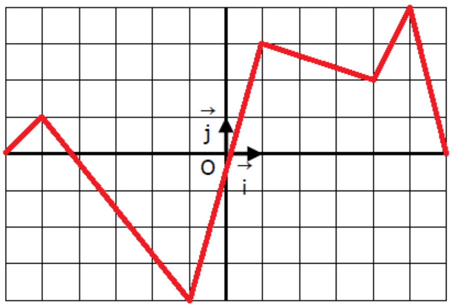
a.

x	-6		-3		0		2		6
$f(x)$	3	↘	0	↗	2	↘	-3	↗	1



b.

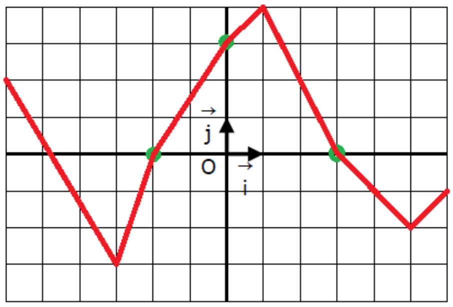
x	-6		-5		-1		1		4		5		6
g(x)	0	↗	1	↘	-4	↗	3	↘	2	↗	4	↘	0



Exercice 7B2

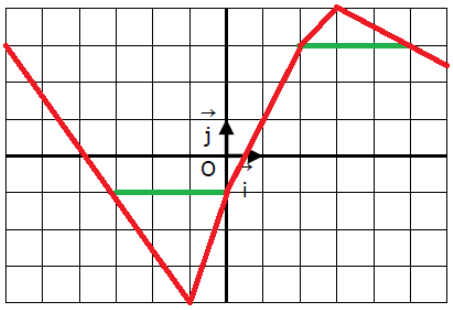
a. - L'image de 0 est 3 ;
- Les antécédents de 0 sont -2 et 3 ;
- Le tableau de variation de f est le suivant :

x	-6		-3		1		5		6
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	4	↘	-2	↗	-1



b. - L'équation g(x) = 2 a pour solutions : S = {-4 ; 1}
- L'inéquation g(x) ≤ -1 a pour solution l'intervalle [-3 ; 0]
- L'inéquation g(x) > 3 a pour solution l'intervalle]2 ; 5[
- Le tableau de variation de g est le suivant :

x	-6		-1		3		6
g(x)	3	↘	-4	↗	4	↘	2,5



Exercice 7B3

a. $-3 \in [-4; -2]$, or f est décroissante sur cet intervalle (elle change l'ordre) donc :
$-4 < -3 < -2 \Rightarrow f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2)$
On aura donc : $1 \geq f(-3) \geq 0$ donc $f(-3) \in [0; 1]$ (attention à l'ordre des bornes)
4 n'étant pas dans cet intervalle on ne peut avoir $f(-3) = 4$ la proposition est donc fausse. **FAUX**

Remarque : Une démonstration est généralement une suite logique / une information implique une autre qui implique une autre … , on utilise généralement « donc » à chaque implication.
Si on doit aller chercher une information supplémentaire pour pouvoir conclure, elle sera introduite avec « or ».

b. 1 et 3 sont dans $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, ainsi $0 < 1 < 3 < 4 \Rightarrow f(0) \geq f(1) \geq f(3) \geq f(4)$
Ainsi $f(1) \geq f(3)$, la proposition est donc vraie. **VRAI**

c. -1 est dans $[-2; 0]$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre), ainsi :
$-2 < -1 \Rightarrow f(-2) \leq f(-1) \Rightarrow 0 \leq f(-1)$ ainsi $f(-1)$ est positif (pris au sens large) **VRAI**

d.

e. 1 est dans $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, ainsi $0 < 1 < 4 \Rightarrow f(0) \geq f(1) \geq f(4)$ donc $3 \geq f(1) \geq -3$.
Comme $f(1) \leq 3$ on ne peut avoir $f(1) > 3$. **FAUX**

f. 5 est dans $[4; 6]$ intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre) et donc :
$4 < 5 < 6 \Rightarrow f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ ainsi on aura $-3 \leq f(5) \leq -1$
Comme $f(5)$ est inférieur ou égal à -1 il ne peut être positif **FAUX**

g. -3 et -2 sont dans $[-4; -2]$ intervalle sur lequel f est décroissante (change l'ordre) et donc
$-4 < -3 < -2 \Rightarrow f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2)$ ainsi on a $f(-3) \geq f(-2)$ ce qui est le contraire de ce que l'on cherchait à avoir. **FAUX**

h. f n'est pas monotone, on va donc raisonner par disjonction des cas (on traite le problème par morceaux)
Si x appartient à $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, alors : $0 < x < 4 \Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(4)$ donc $3 \geq f(x) \geq -3$
Si x appartient à $[4; 6]$ intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre) alors :
$4 < x < 6 \Rightarrow f(4) \leq f(x) \leq f(6)$ ainsi on aura $-3 \leq f(x)$
Quand x est dans $[0; 6]$, il est soit dans $[0; 4]$ soit dans $[4; 6]$. Dans les deux cas $f(x) \geq -3$ donc **VRAI**

2) Une fonction admet un minimum *m* sur un intervalle I, si elle atteint au moins une fois la valeur *m* sur I et si pour tout $\boldsymbol{x}$ de *I* on a $\boldsymbol{f(x) \geq m}$.
Ici on a déjà prouvé au **h** que grand $x \in [0\ ;\ 6], f(x) \geq -3$, or $f(4) = -3$ donc la valeur -3 est atteinte au moins une fois. Les deux conditions étant remplies on aura -3 minimum de f sur $I = [0; 6]$.

3) f n'est pas monotone entre -1 et 1 donc à priori je ne peux utiliser les informations sur les variations pour comparer les images de ces deux valeurs.

Corrections

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[-5; 10]$ admettant le tableau de variations suivant.

x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	↘	1	↗	9	↘	3

Effectuer les comparaisons suivantes quand elles sont possibles après les avoir justifier.

a) $f(5)$ et $f(7)$

5 et 7 sont dans $[4; 10]$ un intervalle dans lequel la fonction f est décroissante donc sur lequel la fonction change l'ordre or $5 < 7$ donc $f(5) > f(7)$

b) $f(2{,}5)$ et $f(3{,}5)$

2,5 et 3,5 sont dans $[2; 4]$ un intervalle dans lequel la fonction f est croissante donc sur lequel la fonction conserve l'ordre or $2{,}5 < 3{,}5$ donc $f(2{,}5) < f(3{,}5)$

c) $f(-5)$ et $f(-3)$

-5 et -3 sont dans $[-5; 2]$ un intervalle dans lequel la fonction f est décroissante donc sur lequel la fonction change l'ordre or $-5 < -3$ donc $f(-5) > f(-3)$

d) $f(-4)$ et $f(3)$

-4 et 3 ne sont pas dans un intervalle sur lequel la fonction est monotone donc on ne peut comparer les deux images avec la méthode utilisée précédemment. A priori il n'y a pas moyen de savoir qui est la plus grande image avec les informations disponibles

e) $f(-5)$ et $f(10)$

-5 et 10 ne sont pas dans un intervalle sur lequel la fonction est monotone donc on ne peut comparer les deux images avec la méthode utilisée précédemment. Cependant on sait que $f(-5) = 8$ et $f(10) = 3$ donc $f(-5) > f(10)$

Exercice 2

1) Prouver que la fonction f qui a tout réel x associe le nombre $f(x) = 2x - 8$ est croissante sur R en utilisant la définition du cours.

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ alors : $2a \leq 2b$ donc $2a - 8 \leq 2b - 8$ ainsi $f(a) \leq f(b)$ la fonction f conserve l'ordre elle est donc croissante.

2) Prouver que la fonction g qui a tout réel x associe le nombre $g(x) = -3x^2 + 1$ est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ en utilisant la définition du cours.

a) Soit a et b deux réels tels que $a \leq b \leq 0$ alors :

Version 1 :

$0 \leq b^2 \leq a^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$

Donc $-3a^2 \leq -3b^2 \leq 0$ (la multiplication par un nombre négatif change l'ordre)

Et donc $-3a^2 + 1 \leq -3b^2 + 1 \leq 1$ ainsi $g(a) \leq g(b) \leq 1$ la fonction g conserve l'ordre.

Version 2 :

$a \leq b \leq 0$ donc $aa \geq ab \geq 0$ et $ab \geq bb \geq 0$ (car multiplier par un nombre négatif change l'ordre).

Ainsi $aa \geq ab \geq bb \geq 0$ et donc $a^2 \geq b^2 \geq 0$

On reprend la version 1 à partir de sa deuxième ligne.

b) Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$ alors :

Version 1 :

$0 \leq b^2 \leq a^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

Donc $-3a^2 \geq -3b^2 \geq 0$ (la multiplication par un nombre négatif change l'ordre)

Et donc $-3a^2 + 1 \geq -3b^2 + 1 \geq 1$ ainsi $g(a) \geq g(b) \geq 1$ la fonction g conserve l'ordre.

Version 2 :

$0 \leq a \leq b$ donc $0 \leq aa \leq ab$ et $0 \leq ab \leq bb$ (car multiplier par un nombre positif conserve l'ordre).

Ainsi $0 \leq aa \leq ab \leq bb$ et donc $0 \leq a^2 \leq b^2$

On reprend la version 1 à partir de sa deuxième ligne.

Exercice 5
Etudier la parité des fonctions suivantes :
$f(x) = -2x + 9$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
$f(-x) = -2(-x) + 9 = 2x + 9$
Or $2x + 9 \neq f(x)$ et $2x + 9 \neq -f(x)$ la fonction n'est donc ni paire ni impaire.
Méthode rapide : quand on se doute que la fonction n'est ni paire ni impaire on peut le prouver à l'aide d'un contre exemple : on peut tester une valeur et son opposée. Par exemple : $f(1) = 7$ et $f(-1) = 11$ ainsi $f(-1)$ ne vaut ni $f(1)$ ni $-f(1)$ donc la fonction est ni paire ni impaire

$g(x) = 7 + 2x^2$ La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_g, -x \in D_g$
$g(-x) = 7 + 2(-x)^2 = 7 + 2x^2 = g(x)$ la fonction est donc paire.

$h(x) = 8x^3 - 7x$ La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_h, -x \in D_h$
$h(-x) = 8(-x)^3 - 7(-x) = -8x^3 + 7x = -(8x^3 - 7x) = -h(x)$ la fonction est donc impaire.

$i(x) = \frac{7}{8+x^2}$
$8 + x^2$ étant toujours strictement positive il n'y aura pas d'annulation au dénominateur et donc pas de valeur d'annulation.
La fonction i est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_i, -x \in D_i$
$i(-x) = \frac{7}{8+(-x)^2} = \frac{7}{8+x^2} = i(x)$ la fonction est donc paire.

$j(x) = 8 + 3\sqrt{x}$
La fonction j est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in D_j, -x \notin D_j$ et donc la fonction est ni paire ni impaire.

$k(x) = 8x - \frac{9}{x}$
La fonction j est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $\forall x \in D_k, -x \in D_k$
$k(-x) = 8(-x) - \frac{9}{(-x)} = -8x + \frac{9}{x} = -\left(8x - \frac{9}{x}\right) = -k(x)$ donc la fonction est impaire.

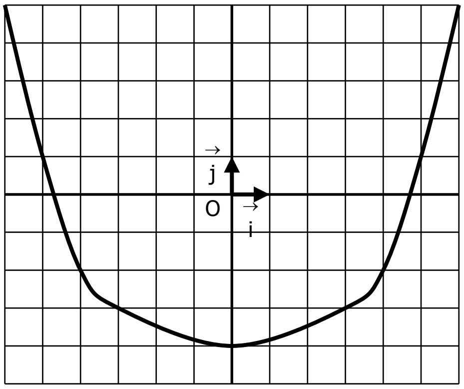
$l(x) = \frac{8}{1-x^2}$
Recherche du domaine de définition : $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$ ou $1 + x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$ ou $x = -1$ ainsi $D_l = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, les deux valeurs interdites sont symétriques par rapport à zéro donc $\forall x \in D_l, -x \in D_l$
$l(-x) = \frac{8}{1-(-x)^2} = \frac{8}{1-x^2} = l(x)$ la fonction l est donc paire.

$m(x) = \frac{5x}{7+x^4}$
$7 + x^4$ étant toujours strictement positive il n'y aura pas d'annulation au dénominateur et donc pas de valeur d'annulation.
La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_m, -x \in D_m$
$m(-x) = \frac{5(-x)}{7+(-x)^4} = \frac{-5x}{7+x^4} = -\frac{5x}{7+x^4} = -m(x)$ donc la fonction est impaire.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER

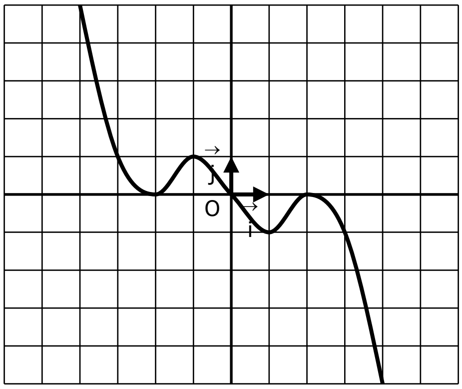
Retrouver celles qui sont **paires**, celles qui sont **impaires**, et celles qui ne sont **ni paires ni impaires** :

a.



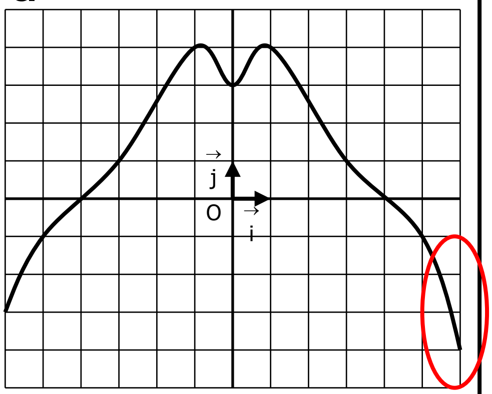
Fonction paire

b.



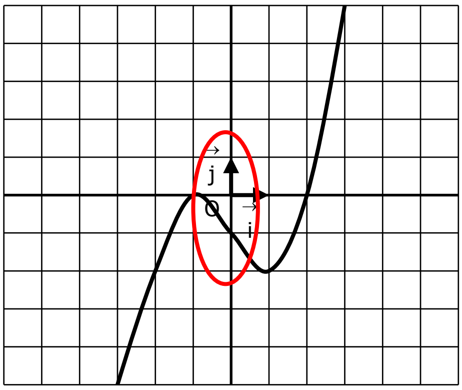
Fonction impaire

c.



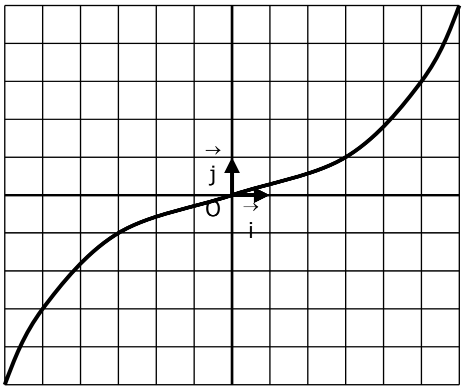
Fonction ni paire ni impaire

d.



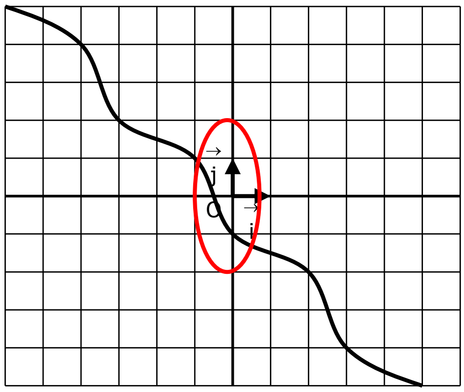
Fonction ni paire ni impaire

e.



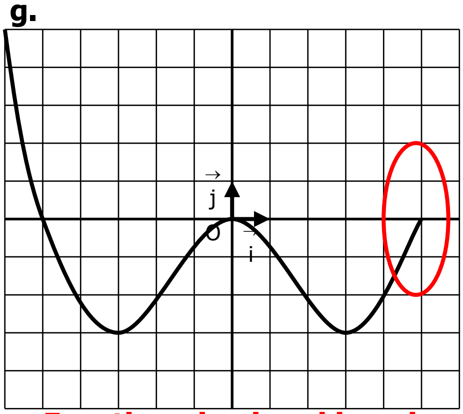
Fonction impaire

f.



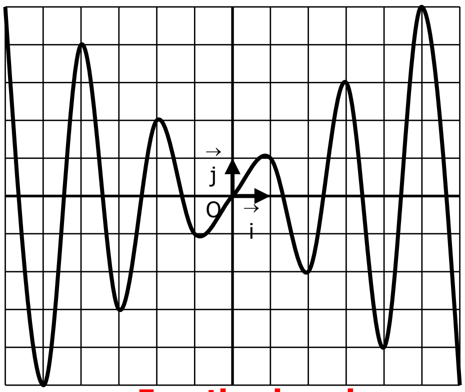
Fonction ni paire ni impaire

g.



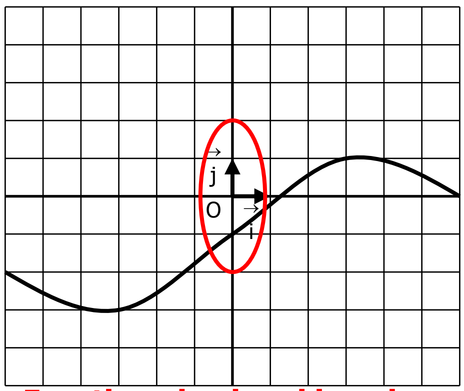
Fonction ni paire ni impaire

h.



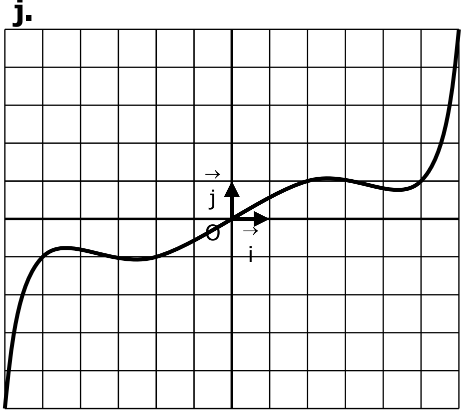
Fonction impaire

i.



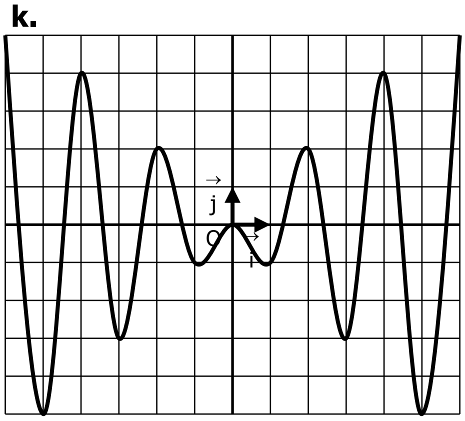
Fonction ni paire ni impaire

j.



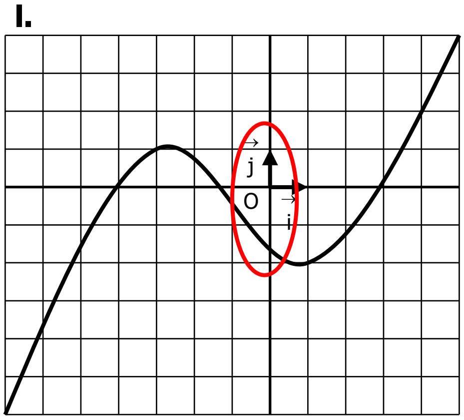
Fonction impaire

k.



Fonction paire

l.



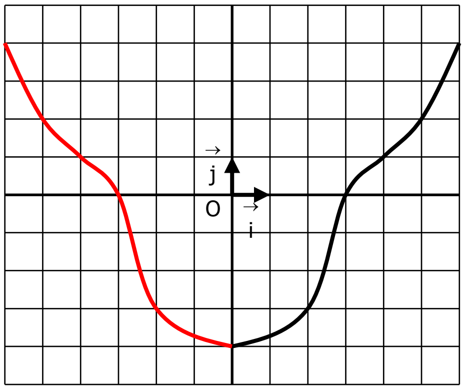
Fonction ni paire ni impaire

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

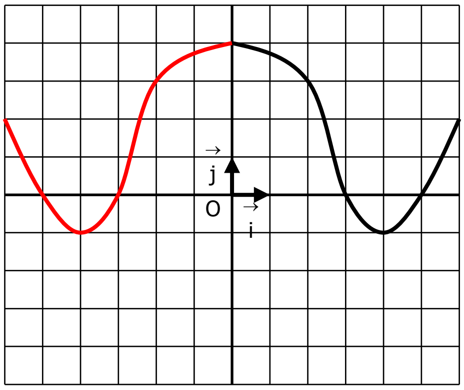
EXERCICE 7B.1

Les fonctions suivantes sont **paires**. Compléter leur représentation graphique.

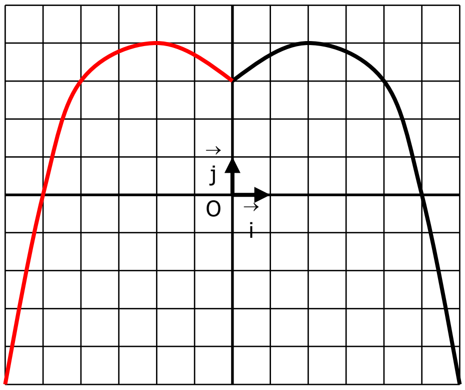
a.



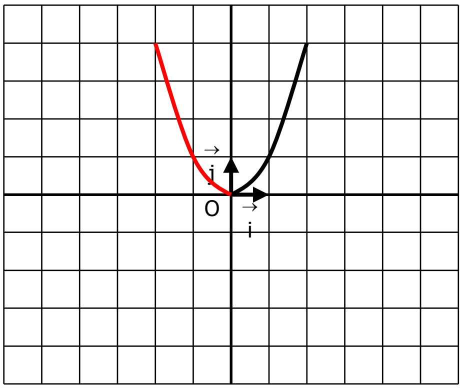
b.



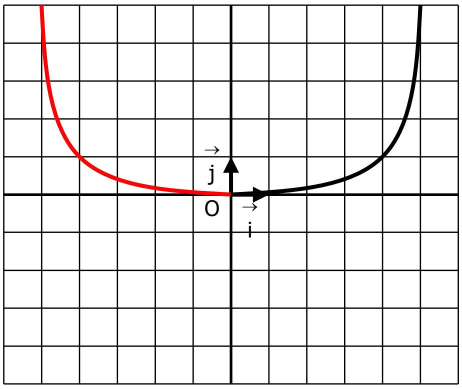
c.



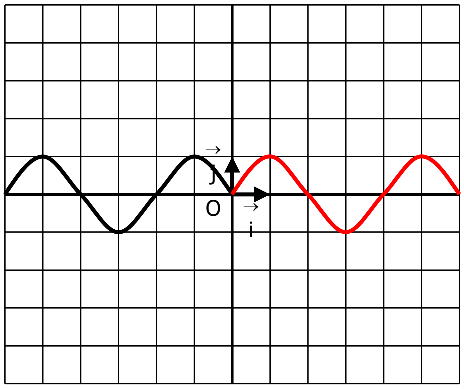
d.



e.

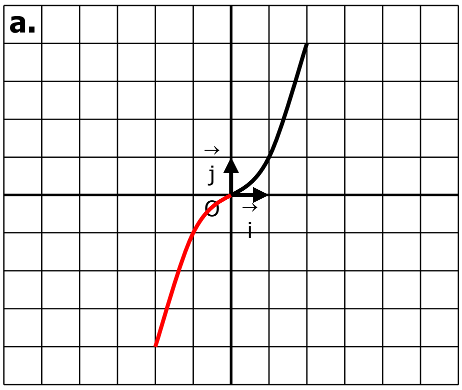


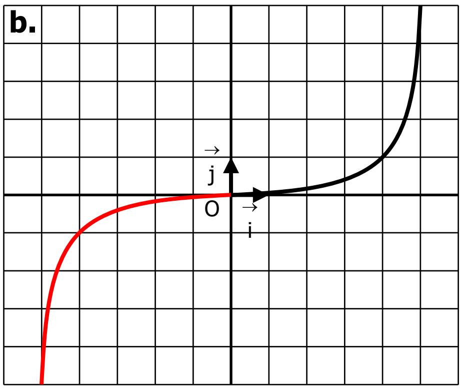
f.

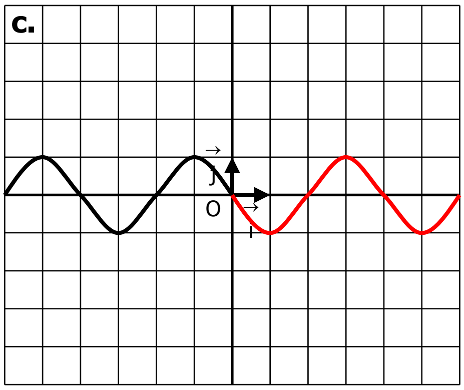


EXERCICE 7B.2

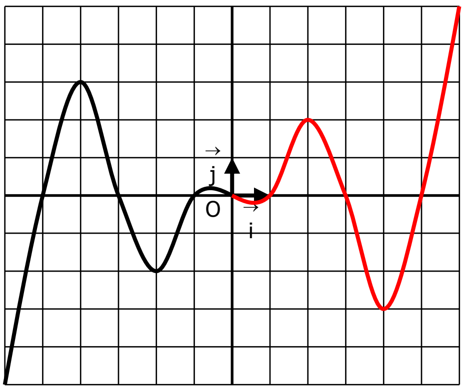
Les fonctions suivantes sont **impaires**. Compléter leur représentation graphique.



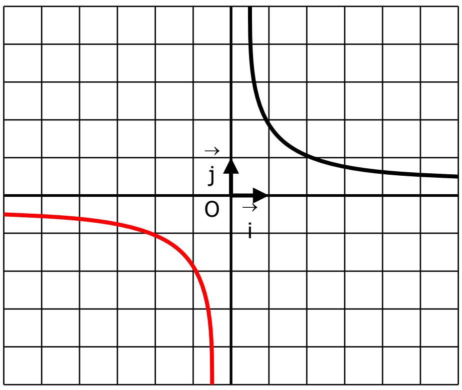




d.



e.



f.