Variations de fonctions de référence

Échauffement

En vous inspirant de la première ligne compléter celles qui suivent

$a < b$ ⇔ $a - a < b - a$ ⇔ $0 < b - a$ ⇔ $b - a$ strictement positif

………. ⇔ $a - a \geq b - a$ ⇔ ………………… ⇔ ……………………………………

$f(a) \leq f(b)$ ⇔ ………………………⇔ ………………….. ⇔ ……………………………………

………. ⇔ ………………………⇔ ………………….. ⇔$f(b) - f(a)$ strictement négatif

Reformulation du cours :

1) Soit I un intervalle et a et b deux nombres de I. On dit que f est croissante sur I si et seulement si pour tout couple a et b réels de I :

$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ autrement dit f $\begin{cases} conserve \\ change \end{cases}$. l'ordre. (*rayer la réponse fausse*)

Nouvelle formulation : $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de signes $\begin{cases} differents \\ identiques \end{cases}$

2) Soit I un intervalle et a et b deux nombres de I. On dit que f est décroissante sur I si et seulement si pour tout couple a et b réels de I :

………………………………… autrement dit f ……………………….. l'ordre.

Nouvelle formulation : $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de signes ………………………

Exemple de preuve

Considérons les variations sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to 5x - 7$.
Soit a et b deux réels.
$f(b) - f(a) = (5b - 7) - (5a - 7) = 5b - 7 - 5a + 7 = 5(b - a)$
Comme multiplier par 5 autrement dit par un nombre positif conserve le signe on aura $5(b - a)$ et $(b - a)$ de même signe donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de même signe donc f est croissante.

Fonction affines : cas général

Soit $f : x \to mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine deux réels. Soit a et b deux réels.
Factoriser : $f(b) - f(a)$= ………………………………………………………………………………
<u>Cas 1 : $m > 0$</u> $m(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes …………………………

donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont …………………………………donc f croissante sur $\mathbb{R}$

<u>Cas 2 : $m < 0$</u> $m(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes …………………………

donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont ……………………………donc f …………………. sur $\mathbb{R}$

Conclusion : les fonctions affines sont croissantes quand leur coefficient directeur est positif et décroissante quand le coefficient est négatif.

La fonction carrée

Soit $f : x \to x^2$. Soit a et b deux réels.
Factoriser : $f(b) - f(a)$= ………………………………………………………………………………
<u>Cas 1 : $a \geq 0$ et $b \geq 0$</u> $(b + a) \geq 0$ donc $(b + a)(b - a)$ et $(b - a)$ sont de

signes ………………………… donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont ……………………………………

donc f croissante sur $[0; +\infty[$

<u>Cas 2 : $a \leq 0$ et $b \leq 0$</u> $(b + a)$….0 donc $(b + a)(b - a)$ et $(b - a)$ sont de

signes ………………………… donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont ……………………………………

donc f ………………………………………………

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2	

La fonction inverse

Soit $f : x \to \frac{1}{x}$. Soit a et b deux réels.
Simplifier $f(b) - f(a)$= ………………………………………………………………………………
<u>Cas 1 : $a > 0$ et $b > 0$</u> $-\frac{1}{ba}$….0 donc $-\frac{1}{ba}(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes

……………………… donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont ………………………………… donc

f ………………………………………………

<u>Cas 2 : $a < 0$ et $b < 0$</u> $-\frac{1}{ba}$….0 donc $-\frac{1}{ba}$ ….0 $(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes

……………………… donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont

………………………………… donc

f ………………………………………………

x	$-\infty$ $+\infty$
$\frac{1}{x}$	

x	$-\infty$ $+\infty$
x^3	

On admettra que **la fonction cube** ($x \to x^3$) est croissante sur $\mathbb{R}$.

Variations de fonctions de référence

Échauffement

En vous inspirant de la première ligne compléter celles qui suivent

$a < b \quad \Leftrightarrow a - a < b - a \Leftrightarrow 0 < b - a \Leftrightarrow b - a$ strictement positif

$a \geq b \quad \Leftrightarrow a - a \geq b - a \Leftrightarrow 0 \geq b - a \Leftrightarrow b - a$ est négatif ou nul

$f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow f(a) - f(a) \leq f(b) - f(a) \Leftrightarrow 0 \leq f(b) - f(a) \Leftrightarrow f(b) - f(a)$ positif ou nul

$f(a) > f(b) \Leftrightarrow f(a) - f(a) > f(b) - f(a) \Leftrightarrow 0 > f(b) - f(a) \Leftrightarrow f(b) - f(a)$ strictement négatif

Reformulation du cours :

1) Soit I un intervalle et a et b deux nombres de I. On dit que f est croissante sur I si et seulement si pour tout couple a et b réels de I :

$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ autrement dit $f \begin{cases} \boldsymbol{conserve} \\ \cancel{change} \end{cases}$. l'ordre. (*rayer la réponse fausse*)

Nouvelle formulation : $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de signes $\begin{cases} \cancel{differents} \\ \boldsymbol{identiques} \end{cases}$

2) Soit I un intervalle et a et b deux nombres de I. On dit que f est décroissante sur I si et seulement si pour tout couple a et b réels de I :

$\boldsymbol{a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)}$ autrement dit f **change** l'ordre.

Nouvelle formulation : $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de signes **différents**.

Exemple de preuve

Considérons les variations sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to 5x - 7$.
Soit a et b deux réels.
$f(b) - f(a) = (5b - 7) - (5a - 7) = 5b - 7 - 5a + 7 = 5(b - a)$
Comme multiplier par 5 autrement dit par un nombre positif conserve le signe on aura $5(b - a)$ et $(b - a)$ de même signe donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de même signe donc f est croissante.

Fonction affines : cas général

Soit $f : x \to mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine deux réels. Soit a et b deux réels.
Factoriser : $f(b) - f(a) = \boldsymbol{(mb + p) - (ma + p) = mb + p - ma - p = m(b - a)}$
<u>Cas 1 : $m > 0$</u> $\quad m(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **identiques**.

donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **de même signe** donc f croissante sur $\mathbb{R}$
<u>Cas 2 : $m < 0$</u> $\quad m(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **opposés,**

donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **de signes opposés** donc f **décroissante** sur $\mathbb{R}$

Conclusion : les fonctions affines sont croissantes quand leur coefficient directeur est positif et décroissante quand le coefficient est négatif.

La fonction carrée

Soit $f : x \to x^2$. Soit a et b deux réels.
Factoriser : $f(b) - f(a) = \boldsymbol{b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)}$
<u>Cas 1 : $a \geq 0$ et $b \geq 0$</u> $\quad (b + a) \geq 0$ donc $(b + a)(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **identiques** donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **aussi de même signe** donc f croissante sur $[0; +\infty[$

<u>Cas 2 : $a \leq 0$ et $b \leq 0$</u> $\quad (b + a) \leq 0$ donc $(b + a)(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **opposés** donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **aussi de signes opposés** donc f **décroissante sur** $]-\infty; 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction inverse

Soit $f : x \to 1/x$. Soit a et b deux réels.
Simplifier $f(b) - f(a) = \boldsymbol{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab} = \frac{-(b-a)}{ab} = \frac{-1}{ba}(b - a)}$
<u>Cas 1 : $a > 0$ et $b > 0$</u> $\quad -\frac{1}{ba} < 0$ donc $-\frac{1}{ba}(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **opposés** donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **de signes opposés** donc f est **décroissante sur** $]\mathbf{0}; +\infty[$.

<u>Cas 2 : $a < 0$ et $b < 0$</u> $\quad -\frac{1}{ba} < 0$ donc $-\frac{1}{ba}(b - a)$ et $(b - a)$ sont de signes **opposés** donc $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont **de signes opposés** donc f est **décroissante sur** $]\mathbf{0}; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

On admettra que **la fonction cube** $(x \to x^3)$ est croissante sur $\mathbb{R}$