Fiche Méthode avec exercices corrigés

Exprimer un vecteur en fonction d'un autre vecteur ou en fonction de plusieurs vecteurs

Quand on vous demande d'exprimer un objet x en fonction d'un objet y on attend de votre part une expression de la forme « x est égal à un calcul contenant y »

Dans le cadre des vecteurs si on vous demande d'exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ il faut partir de l'information donnée par l'énoncé, puis la retravailler pour faire en sorte de terminer avec $\overrightarrow{AB}$ =……$\overrightarrow{BC}$.

- Si on part d'une égalité, on va casser tous les vecteurs pour n'avoir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans l'égalité. En traitant celle-ci comme une équation avec des sommes, différence et division on finira avec l'égalité attendue.
- On peut aussi parti de $\overrightarrow{AB}$ et le casser et utiliser les égalités offertes par l'énoncé pour finir par $\overrightarrow{AB}$ =……$\overrightarrow{BC}$

Exercice 1

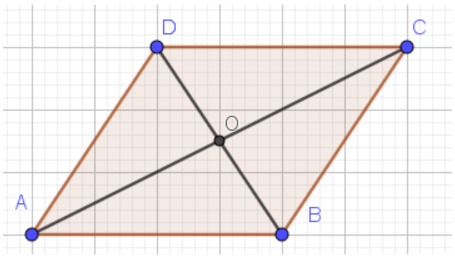
Dans les quatre configurations suivantes vous devez exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

1) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$
2) $3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$
3) $3\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$
4) $-5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{BA}$

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme de centre O

1) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
3) On vient d'exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, maintenant exprimer $\overrightarrow{DO}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}$.



Parallélisme et alignements de points

Ça passera souvent par prouver que deux vecteurs sont colinéaires, autrement dit avoir une égalité de la forme $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, ce qui donne automatiquement le parallélisme entre les droites portant le même nom que les vecteurs. Si en plus comme c'est le cas ici, ces noms ont une lettre en commun alors les droites sont confondues et les points sont alignés.

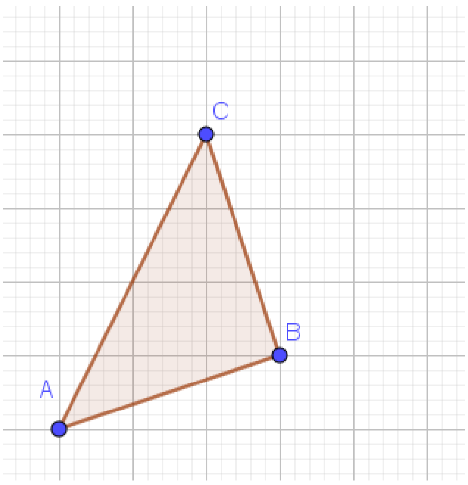
Exercice 3

La figure ci-contre sera compléter.

1) Placer le point E tel que ABEC soit un parallélogramme.
2) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Soit D le point caractérisé par $3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$, le but du reste de l'exercice est de placer ce point.

3) En utilisant la relation de Chasles sur $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ exprimer $\overrightarrow{DA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) Prouver que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires.
5) Que peut-on en déduire quant aux points A, E et D ?
6) Si ça n'a pas déjà été fait à la question 4) exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et en déduire comment placer le point D.
7) Placer le point D.



Exercice 4

Soit ABCD un rectangle. Soit I et J deux points définis respectivement par :$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure

De toute évidence les droites (IJ) et (AC) ne sont pas parallèles, mais cette évidence n'est pas une preuve. Il nous faut le montrer rigoureusement et c'est ce que nous allons faire dans la suite de l'exercice.

2) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont ils colinéaires ? (on justifie bien proprement)
5) Que peut on en déduire concernant les droites (IJ) et (AC) ?

Corrections

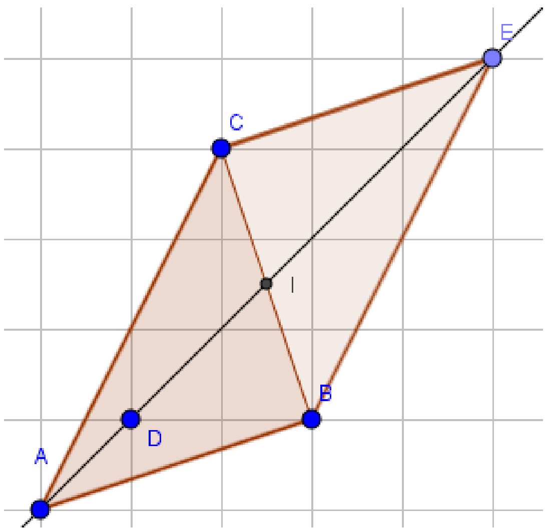
Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
2) $3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ $\quad\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ $\quad\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{-3}\overrightarrow{AC}$
3) $3\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$
4) $-5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{BA}$ $\quad\Leftrightarrow \quad -5\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{BA}$
$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{BA}$ $\quad\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow 9\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Exercice 2

1) ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu et donc O est le milieu de $[AC]$
donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ or ABCD étant un parallélogramme on aura $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
3) ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu et donc O est le milieu de $[DB]$
donc $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ or ABCD étant un parallélogramme on aura $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
donc $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
De plus ABCD étant un parallélogramme on aura $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

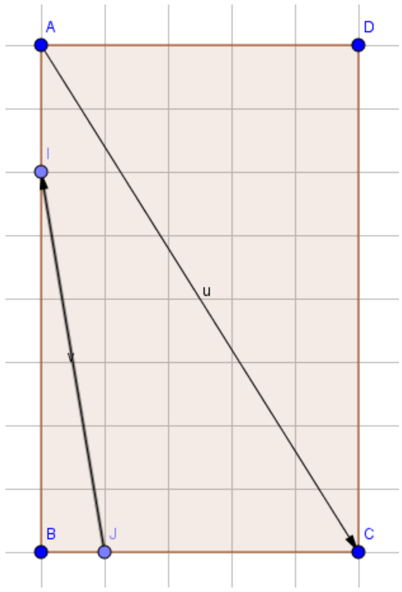
Exercice 1



1) Voir figure
2) Comme ABEC est un parallélogramme d'après la propriété du cours on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Version longue :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ or ABEC est un parallélogramme
donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ et donc : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
3) D'après la question on doit obtenir une égalité de la forme : $\overrightarrow{AD} = \ \dots\overrightarrow{AB} + \ \dots\ \overrightarrow{AC}$
$3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow\ 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow\ 5\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow\ 5\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow\ -5\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
je multiplie a droite et à gauche par -1.
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ $\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
4) On a $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ donc $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires.
5) On en déduit que les droites (AD) et (AE) sont parallèles, or elles passent toutes deux par A et donc elles sont confondues et donc A, D et E sont alignés.
6) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ donc $AD = \frac{1}{5}AE$ et D est sur la droite AE. Il faut diviser la longueur AE en cinq. Mais ici pas besoin de règle ou de calculatrice, [AE] fait 5 diagonales de carreaux et donc [AD] n'en fera qu'une seule.
7) Voir figure

Exercice 2

1) cf figure ci-contre.



2)

ABCD est un rectangle donc c'est un parallélogramme, ainsi :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

$= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

4) On remarque que les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas proportionnels. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires.

5) on peut en déduire qu'ils n'ont pas la même direction et donc que les droites (IJ) et (AC) ne sont pas parallèles.