Baccalauréat Général - Série S – Epreuve de mathématiques
Février 2013

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7 ou 9
Ce sujet comporte 10 pages

Exercice 1 – [5 points]
à traiter par l'ensemble des candidats

Dans une usine, deux machines A et B fabriquent des écrous. On sait que 64% de la production totale d'écrous provient de la machine A et le reste de la machine B. Une étude statistique a montré que

- 5% des écrous provenant de la machine A sont défectueux
- 8% des écrous provenant de la machine B sont défectueux.

On prélève au hasard un écrou à la sortie de l'usine. On considère les événements D, A et B suivants :

- D l'événement « l'écrou tiré est défectueux »
- A l'événement « l'écrou tiré provient de la machine A »
- B l'événement « l'écrou tiré provient de la machine B »

Le nombre d'écrous produit par l'usine étant très important, on considère que le tirage est avec remise.

PARTIE A :

▶1. $P_A(D) = \frac{5}{100} = 0{,}05$ et $P_B(D) = \frac{8}{100}$.

▶2. A et B réalisent une partition de Ω donc d'après la formule de probabilité totale :

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = \frac{64}{100}0{,}05 + \left(1 - \frac{64}{100}\right)0{,}08 = 0{,}0608.$

▶3. $P_A(D) = 0{,}05$ et $P(D) = 0{,}0608$ donc $P_A(D) \neq P(D)$ donc les événements A et D sont dépendants .

▶4. On tire au hasard 5 écrous à la sortie de l'usine de façon indépendante, on appelle Y la variable aléatoire qui correspond au nombre d'écrous défectueux.

a) On répète de manière identique et indépendante 5 fois la même expérience de Bernouilli à deux issues D et $\overline{D}$ avec $P(D) = 0{,}0608$, la variable aléatoire comptant le nombre d'occurrence de l'événement D suivra donc une loi binomiale de paramètre 5 et 0,0608. On note cette loie : $\mathcal{B}\left(5; \frac{608}{10000}\right)$

b) $P(F) = P(Y = 1) = \binom{5}{1}0{,}0608^1(1 - 0{,}0608)^4 \approx 0{,}2365$

PARTIE B :

On tire successivement avec remise un écrou à la sortie de l'usine, on pose X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier écrou défectueux.

On rappelle que la probabilité pour qu'un écrou soit défectueux à la sortie de l'usine est $p = 0{,}0608$.

▶1. $P(X = n)$ correspond à la probabilité d'avoir n-1 pièces non défectueuse puis une pièce défectueuse , il n'y a qu'un seul chemin qui correspond à cet événement donc :

$$P(X = n) = 0{,}0608 \times (1 - 0{,}0608)^{n-1} = 0{,}0608 \times (0{,}9392)^{n-1}.$$

▶2. G_n Correspond au cas ou X vaut 0 ou 1 ou 2 ou … ou n donc :

$$P(G_n) = \sum_{k=1}^{k=n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{k=n} (0{,}0608 \times (0{,}9392)^{k-1}) \ = 1 - (0{,}9392)^n$$

▶3. $P(G_n) \leq 1$ de plus :

$P(G_n) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - (0{,}9392)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \ \geq (0{,}9392)^n$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geq \ln((0{,}9392)^n) \Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geq n \times \ln(0{,}9392) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9392)} \leq n$, or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9392)} \approx 755{,}1$

donc à partir de N=756 on aura $P(G_n) \in [0{,}99; 1]$

Exercice 2 – [5 points]
à traiter par l'ensemble des candidats

Partie A : Restitution Organisée de Connaissance

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$.

▶1. $g'(x) = e^x - x$ et $g''(x) = e^x - 1$.

▶2. a) e^x étant croissante g'' le sera aussi , de plus $g''(0) = 0$ donc g'' sera positive sur $[0;+\infty[$ et donc g' sera croissante sur cet intervalle.

b) $g'(0) = 1$ et g' est croissante donc g' sera positive strictement sur $[0;+\infty[$.

▶3. a) donc g sera croissante, de plus $g(0) = 1$ donc $g(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

b) soit $x > 0$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{2}x$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

▶1. $f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

▶2. $f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ f' sera positive jusqu'à x=1 puis négative et donc f est croissante sur $]-\infty;1]$ puis décroissante sur $[1;+\infty[$

▶3. $(-2) = -2e^{-(-2)} \approx -14{,}8$, $f(-1) = -1e^{-(-1)} \approx -2{,}7$ donc $f(-2) < -4 < f(-1)$

De plus f est continue strictement croissante sur [-2 ;-1] donc d'après le corollaire du TVI sur $[-2;-1]$, l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution notée α.

▶4. L'équation $f(x) = -4$ admet-elle d'autres solutions sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.

sur $[1;+\infty[$ ***f* est positive sur** $[1;+\infty[$ donc $f(x) = -4$ ne peut avoir de solution **sur** $[1;+\infty[$

f est croissante sur $]-\infty;1]$ donc sur$]-\infty;-2]$ or $f(-2) < -4$ donc $(x) = -4$ ne peut avoir de solution **sur** $]-\infty;-2]$

f est croissante sur $]-\infty;1]$ donc sur$[-1;1]$ or $f(-1) > -4$ donc $(x) = -4$ ne peut avoir de solution **sur** $[-1;1]$

Ainsi α est la seule solution à l'équation $f(x) = -4$

Partie C : recherche de l'encadrement d'une solution

On se propose de trouver un encadrement plus précis de α en utilisant l'algorithme de dichotomie suivant :

```
VARIABLES
    a est réel
    b est réel
    x est réel
    p est réel
DEBUT DE L'ALGORITHME
    Demander la première borne et la stocker dans a
    Demander la seconde borne et la stocker dans b
    Demander la précision et la stocker dans p
    Tant que b-a>p
        (a + b)/2 → x
        Sif(x)<-4
        Alors
            x → a
        Sinon
            x → b
        Fin SI
    Fin tant que
    Afficher a
    Afficher b
FIN DE L'ALGORITHME
```

▶1. Compléter l'algorithme.

▶2. Quatre élèves voulaient obtenir un encadrement à 10^{-1} près de α, pour cela chacun d'entre eux a essayé de rentrer le programme correspondant et a obtenu les résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

Nom	**Borne a (arrondie à 10^{-2})**	**Borne b (arrondie à 10^{-2})**
Andromaque	$-1{,}68$	$-1{,}11$
Sganarelle	$-1{,}25$	$-1{,}18$
Candide	$-5{,}72$	$-5{,}68$
Godot	On attend encore ses réponses	

L'encadrement d'andromaque est vraiment trop large,.

On sait que $\alpha \in [-2; -1]$ donc la borne b trouvée par Candide est trop basse.

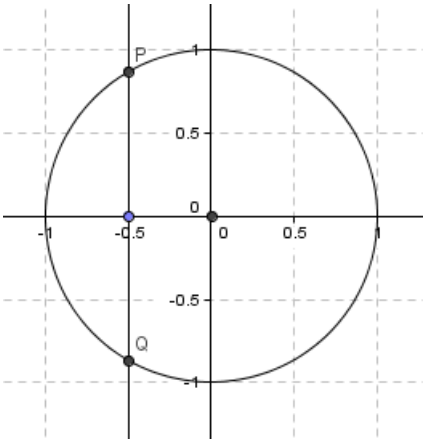
Par élimination la seule réponse adaptée semble être celle de Sganarelle.

Exercice 3 – [5 points]
à traiter par l'ensemble des candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et K le point d'affixe -1.



▶1. a) $p = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. $\quad OP = |z_P - z_O| = |p| = 1$

$q = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. $\quad OQ = |z_Q - z_O| = |q| = 1$.

Ainsi $OP = OQ = 1$ donc P et Q sont le cercle de centre O et de rayon 1.

b) Faire une figure et construire les points P et Q.

▶2. a) $M \in D \Leftrightarrow |z| = |z+1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{OM}}| = |z_{\overrightarrow{KM}}| \Leftrightarrow$ OM=KM $\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice de [KO].

Version alternative : on pose $z = x + iy$ $\quad |z| = |z+1|$

$\Leftrightarrow |x+iy| = |x+iy+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$ car une somme de carré est toujours positive

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (c'est plus long, mais la réponse à la question suivante est racourcie)

b)on a vu au 1a) que P et Q sont sur le cercle, montrons maintenant que leur affixe vérifie $|z| = |z+1|$.

Pour P, on a $|z| = |p| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$ et $|z+1| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $|z| = |z+1|$

Pour Q, on a $|z| = |q| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$ et $|z+1| = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $|z| = |z+1|$

Ainsi les points P et Q sont aussi sur D.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On suppose que l'origine O du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

▶1. a) O étant le centre du cercle circonscrit à ABC on a OA = OB = OC donc :

$|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_C - z_O|$ donc $|a| = |b| = |c|$.

De plus comme a est non nul on aura $\frac{|a|}{|a|} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|c|}{|a|}$ donc $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.

b) O est le centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ donc :

$z_A-z_O+z_B-z_O+z_C-z_O=0$ donc $a+b+c=0$.

c) on a : $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$ or $a+b+c=0$ donc $c=-a-b$ ainsi : $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{-a-b}{a}\right|=1$ donc

$\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{a+b}{a}\right|=1$ ou encore $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{b}{a}+1\right|=1$

d) on a $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{b}{a}+1\right|$ donc $\frac{b}{a}$ est l'affixe d'un point sur la droite D de plus $\left|\frac{b}{a}\right|=1$ donc c'est aussi l'affixe d'un point du cercle C, or il n'y a que deux points d'intersections entre le cercle et la droite P et Q d'affixe p et q ainsi on a : $p=\frac{b}{a}$ ou $q=\frac{b}{a}$

.

▶2. Dans cette question on admet que $p=\dfrac{b}{a}$ et $\boldsymbol{q=\dfrac{c}{a}}$.

a) Soit W le point d'affixe 1, alors $\frac{q-1}{p-1}=\frac{z_{\overrightarrow{WQ}}}{z_{\overrightarrow{WP}}}=$

$$\frac{q-1}{p-1}=\frac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{9}{4}+2\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{6}{4}+2\frac{3\sqrt{3}i}{4}}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

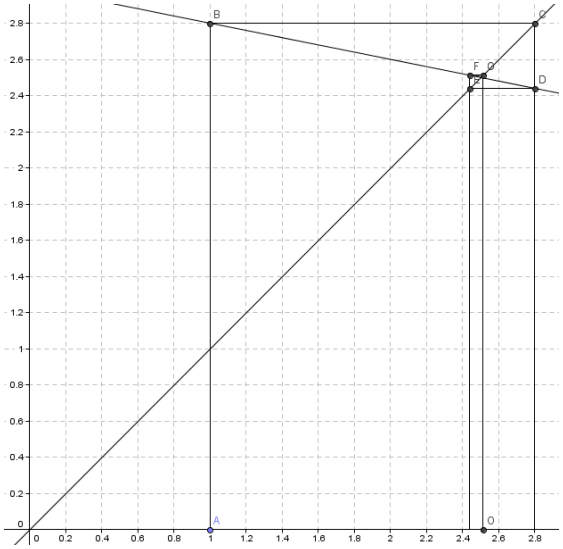
b) $\frac{q-1}{p-1}=\frac{\frac{c}{a}-1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{c-a}{b-a}$

c) On a : $e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{q-1}{p-1}=\frac{c-a}{b-a}$ donc $\frac{AC}{AB}=1$ et $\arg\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ donc ABC est équilatéral.

Exercice 4 - [5 points]
à traiter par les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = -\dfrac{1}{5}u_n + 3$.



Partie A : Une conjecture

▶1.

▶2. La suite (u_n) semble converger vers 2,5, c'est le point d'intersection entre les droites (d) et (Δ). Le polygone permettant de trouver les valeurs des termes de la suite semble s'enrouler autour du point de coordonnée (2,5; 2,5)

Partie B : Démonstration de la conjecture

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier n naturel par $v_n = u_n - 2{,}5$.

▶1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2{,}5 = -\frac{1}{5}u_n + 3 - 2{,}5 = -\frac{1}{5}u_n + 0{,}5 = -\frac{1}{5}(u_n - 2{,}5) = -\frac{1}{5}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme -1,5 et de raison $-\frac{1}{5}$ donc on aura pour tout entier n naturel

$v_n = -1{,}5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

▶2. $v_n = u_n - 2{,}5$ donc $u_n = v_n + 2{,}5$ donc $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

▶3. En déduire la preuve de la conjecture faite dans la question 2. de la Partie A.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2{,}5 - 1{,}5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 2{,}5$ ainsi (u_n) converge bien vers 2,5.

Partie C : Le cas général

Soit $a \in \mathbb{R}$, la suite (w_n) est définie par $w_0 = a$ et pour tout entier naturel $n, w_{n+1} = -\dfrac{1}{5}w_n + 3$.

▶1. soit P_n: «$w_n = 2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ »

initialisation : pour $n = 0$ on a : $w_0 = a$ et $2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^0 = 2{,}5 + (a - 2{,}5) = a$ donc P_0 vraie

Hérédité Soit k tel que P_k soit vraie

$$w_{k+1} = -\frac{1}{5}w_k + 3 = -\frac{1}{5}\left(2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^k\right) + 3 = -0{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1} + 3$$

$= 2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1}$ donc P_{k+1} vraie d'où l'hérédité.

Conclusion pour tout entier n naturel $w_n = 2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$

▶2. (w_n) est constante ⇔ $w_{n+1} - w_n = 0$

⇔ $2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} - \left(2{,}5 + (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\right) = 0$

⇔ $(a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n} \left(-\frac{1}{5} - 1\right) = 0$ ⇔ $a - 2{,}5 = 0$ ⇔ a=2,5

▶3. Démontrer que la limite de la suite (w_n) est un réel qui ne dépend pas de a.

$-1 < -\frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a - 2{,}5) \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

Exercice 4 - [5 points]
à traiter par les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A :

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on considère le système S_k : $\begin{cases} 6{,}25x - 9y = 0{,}2 \\ 4{,}5x - 6{,}5y = k \end{cases}$

▶1. Ecrire le système S_k sous forme matricielle : $A\,X = B_k$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 et X, B_k sont deux matrices colonnes.

$A = \begin{bmatrix} 6{,}25 & -9 \\ 4{,}5 & -6{,}5 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad B_k = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ k \end{bmatrix}$

▶2. $\det(A) = 6{,}25(-6{,}5) - 4{,}5(-9) = -0{,}125 \neq 0$ donc A est inversible.

$A^{-1} = \frac{1}{-0{,}125}\begin{bmatrix} -6{,}5 & 9 \\ -4{,}5 & 6{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & -72 \\ 36 & -50 \end{bmatrix}$.

▶3. On aura $X = A^{-1}B_k = \begin{bmatrix} 52 & -72 \\ 36 & -50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}4 - 72k \\ 7{,}2 - 50k \end{bmatrix}$.

Partie B :

Dans cette question on pose $A = \begin{pmatrix} 6{,}25 & -9 \\ 4{,}5 & -6{,}5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

▶1. Démontrer que P est inversible et donner P^{-1}. (*On utilisera la calculatrice pour le calcul de* P^{-1})

$3 \times 3 - 2 \times 4 = 1 \neq 0$ donc P est inversible et a pour inverse $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

▶2. a) $P^{-1}\,A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6{,}25 & -9 \\ 4{,}5 & -6{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ 1 & -1{,}5 \end{bmatrix}$

donc $P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ 1 & -1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} = D$

b) $D^n = \begin{bmatrix} 0{,}25^n & 0 \\ 0 & (-0{,}5)^n \end{bmatrix}$soit $P_n =$ «$D^n = \begin{bmatrix} 0{,}25^n & 0 \\ 0 & (-0{,}5)^n \end{bmatrix}$» .

▶3. $P^{-1}\,A\,P = D$ donc $PP^{-1}\,A\,P = PD$ donc $PP^{-1}\,A\,PP^{-1} = PDP^{-1}$ donc $A = PDP^{-1}$.

▶4. Initialisation : on a établi à la question 3 que $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = P\,D^nP^{-1}$ est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $k \geq 1$ tel que $A^k = P\ D^k P^{-1}$
$A^{k+1} = A^k A = P\ D^k P^{-1}\ \ PDP^{-1}$ D'après l'hypothèse de récurrence et la réponse à la question 3)
$= P\ D^k D P^{-1} = P\ D^{k+1} P^{-1}$ La propriété est bien héréditaire.
Conclusion
pour tout entier $n \geq 1,\ A^n = P\ D^n P^{-1}$
▶5. En déduire les coefficients de la matrice A^n pour tout entier $n \geq 1$.

$$A^n = P\ D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}25^n & 0 \\ 0 & (-0{,}5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 0{,}25^n & 4 \times (-0{,}5)^n \\ 2 \times 0{,}25^n & 3 \times (-0{,}5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4^n} - \frac{8}{(-2)^n} & \frac{-12}{4^n} + \frac{12}{(-2)^n} \\ \frac{6}{4^n} - \frac{6}{(-2)^n} & \frac{-8}{4^n} + \frac{9}{(-2)^n} \end{bmatrix}$$

▶6. Comme on aura $-1 < \frac{1}{4} < 1$ et $-1 < \frac{1}{-2} < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(-2)^n} = 0$

Donc par somme et différences de limites tous les coefficients de A^n convergent vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{9}{4^n} - \frac{8}{(-2)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-12}{4^n} + \frac{12}{(-2)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{6}{4^n} - \frac{6}{(-2)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-8}{4^n} + \frac{9}{(-2)^n} = 0$$