Proposition de barème

Exercice 1

Partie A	**1a) 0,25**	**b) 0,5**	**2) 1**	**3) a)0,5**	**b) 1**
Partie B	**1) 0,5**	**2) 1,25pt**			

Exercice 2

1 point par question

Exercice 3

Partie A	**1) 0,25**	**2) 0,75**	**3) 0,5**	**4) 0,75**
Partie B	**1) 0,25**	**2) 0, 5**	**3) 1,25**	**4) 0,75**

Récurrence 0,25 pour intro et conclusion et 1pt pour l'hérédité

Exercice 4

1a) 0,25	**b) 0,5**	**2) a)0,5**	**b) 1**	**c) 0,25**		
3)a) 1	**b) 0,52**	**c) 0,25**	**4)a) 0,5**	**b) 0,25**	**c)0,25**	

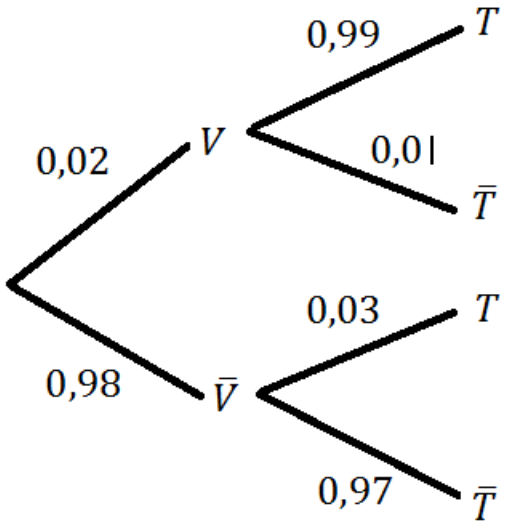
Exercice 1 – [5 points]

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A



▶1. a) $P(V) = 0{,}02$ $\quad P_V(T) = 0{,}99$

$P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0{,}97$

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

$P(V \cap T) = P(V)P_V(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$

▶2. D'après la formule de probabilité totale :

$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) =$

$0{,}0198 + P(\bar{V})P_{\bar{V}}(T) = 0{,}0198 + 0{,}98 \times 0{,}03$

$= 0{,}0198 + 0{,}0294 = 0{,}0492$

▶3. a) $P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} = \frac{33}{82} \approx 0{,}4024 \approx 40\%$ donc quand le teste est positif on a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée.

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

$$P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{V})P_{\bar{V}}(\bar{T})}{1 - P(T)} = \frac{0{,}98 \times 0{,}97}{1 - 0{,}0492} = \frac{0{,}9506}{0{,}9508} \approx 0{,}9998$$

PARTIE B

▶1. On répète dix fois de manière indépendante la même épreuve aléatoire à deux issues dont une considérée comme une réussite a une probabilité d'occurrence de $P(V) = 0{,}02$, X la variable aléatoire comptant le nombre de réussite suivra donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}02$

▶2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

$$P(X \geq 2) = P(\overline{X < 2}) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$= 1 - \left(\binom{10}{0}0{,}02^0 0{,}98^{10} + \binom{10}{1}0{,}02^1 0{,}98^9\right) \approx 0{,}0162$

Exercice 2 – [5 points]

▶1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 3i$, $z_B = -3 - i$ et $z_C = 2{,}08 + 1{,}98i$. Le triangle ABC est :

$AB = |z_B - z_A| = |-3 - i - (-2 + 3i)| = |-1 - 4i| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

$BC = |z_B - z_C| = |-3 - i - (2{,}08 + 1{,}98i)| = |-5{,}08 - 2{,}98i| = \sqrt{(-5{,}08)^2 + (-2{,}98)^2} = \sqrt{34{,}6868}$

$AC = |z_C - z_A| = |2{,}08 + 1{,}98i - (-2 + 3i)| = |4{,}08 - 1{,}02i| = \sqrt{(4{,}08)^2 + (-1{,}02)^2} = \sqrt{17{,}6868}$

$17{,}6868 + 17 = 34{,}6868$ donc le triangle ABC est rectangle mais pas isocèle

▶2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z - 4i}{z + 2}$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-4i}{z+2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-4i|}{|z+2|} = 1 \Leftrightarrow |z - 4i| = |z + 2| \Leftrightarrow |z - z_E| = |z - z_D| \Leftrightarrow$ ME=MD $\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice du segment [ED], segment dont les extrémités sont E et D les points d'affixe $4i$ et -2 . La réponse est donc B.

▶3. Le nombre complexe $\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ pour forme algébrique : $\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}} =$

$\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Quand on considère les quatre réponses proposées suele celle de B correspond à une forme algébrique. La réponse est donc B

▶4. L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet pour solution :

$\Delta = 1 - 4 = -3$ donc l'équation a deux solutions complexes $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} =$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$i\,e^{\frac{i\pi}{6}} = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2$ donc la réponse A est valable.

▶5. $\dfrac{i \times z_1}{z_2} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{6}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi}{4}-\frac{-i\pi}{3}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{6\pi}{12}+\frac{i3\pi}{12}+\frac{i4\pi}{12}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

La bonne réponse est la D

Exercice 3 – [5points]

Partie A : Une première gestion dans un parc animalier

On étudie l'évolution de la population d'herbivores, au cours du temps à partir de l'an 2000, dans le parc animalier *Alpha*.

On appelle n le nombre d'années écoulées après le début de l'expérience. En 2000, c'est à dire pour $n = 0$, le parc comptait 10 000 herbivores. On note A_n le nombre d'herbivores en l'an $2000 + n$.

Chaque année, on estime que le taux de naissance est de 10 % et que 500 herbivores meurent dans ce parc.

▶1. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = 1{,}1 \times A_n - 500$.

A l'année n le nombre d'herbivores est de A_n , cette quantité augmentée de 10% est $A_n\left(1 + \frac{10}{100}\right) = A_n 1{,}1$ si on retranche à cette quantité les 500 herbivores morts durant l'année on obtient $1{,}1 \times A_n - 500$ la quantité d'herbivores présent l'année suivante : $n + 1$.

Donc on a bien : $A_{n+1} = 1{,}1 \times A_n - 500$.

▶2. Prouver que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = A_n - 5\,000$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

$u_{n+1} = A_{n+1} - 5\,000 = 1{,}1 \times A_n - 500 - 5000$

$= 1{,}1 \times A_n - 5500 = 1{,}1(A_n - 5000) = 1{,}1u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme : $u_0 = A_0 - 5\,000 = 10\,000 - 5\,000 = 5\,000$. Donc pour tout entier naturel n $u_n = 5\,000 \times 1{,}1^n$

▶3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $A_n = 5\,000(1 + 1{,}1^n)$

On sait que $u_n = A_n - 5\,000$ donc $A_n = u_n + 5000 = 5\,000 \times 1{,}1^n + 5000 = 5\,000(1{,}1^n + 1)$

▶4. Déterminer **à partir** de quelle année, la population d'herbivores dépasse 20 000 têtes.

On doit résoudre $A_n \geq 20\,000 \Leftrightarrow 5\,000(1{,}1^n + 1) \geq 20\,000 \Leftrightarrow 1{,}1^n + 1 \geq \frac{20000}{5000} \Leftrightarrow$ $1{,}1^n \geq 4 - 1 \Leftrightarrow \ln(1{,}1^n) \geq \ln(3) \Leftrightarrow n\ln(1{,}1) \geq \ln(3) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}1)}$ or $\frac{\ln(3)}{\ln(1{,}1)} \approx 11{,}53$ donc la population d'herbivore dépassera 20 000 individus à partir de la 12ème année

Partie B : Une deuxième gestion dans un autre par animalier

On se donne une population d'herbivores dans un parc *Béta* et on étudie l'évolution de cette population au cours du temps à partir de l'an 2000. On note B_n le nombre d'herbivores, en l'an $2000 + n$ dans le parc *Béta*. En 2000, ce parc comptait 10 000 herbivores.

A partir de 2001, on amène de l'extérieur du parc x_n autres herbivores. En 2001, on en a amené 1 000. A partir de 2001, d'une année sur l'autre, le nombre d'herbivores venant de l'extérieur diminue de 20%. On a donc $B_0 = 10\,000$ et $x_1 = 1\,000$.

On suppose que seul cet apport d'herbivores de l'extérieur fait varier le nombre d'herbivores du parc *Béta*.

▶1. Prouver que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $x_{n+1} = 0{,}8\, x_n$ et que pour tout entier naturel n, on a $B_{n+1} = B_n + x_{n+1}$.

Diminuer une quantité de 20% revient à la multiplier par $\left(1-\frac{20}{100}\right)=0{,}8$ donc $x_{n+1}=0{,}8\,x_n$
Donc (x_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 1000 donc
$x_n=1000\times 0{,}8^n$
Il est dit que seul l'apport extérieur fait varier la quantité d'herbivore du parc donc pour passer de B_n la quantité d'herbivore dans le parc Béta de l'année n à B_{n+1} la quantité de l'année suivante on doit ajouter x_{n+1}.

▶2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la population d'herbivores du parc *Béta* en 2056 :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 10 000
X prend la valeur 1 000
Tant que N < 56
        B prend la valeur B + X
        X prend la valeur 0,8X
        N prend la valeur N + 1
Fin tant que
Afficher ...
```

▶3. Par récurrence sur n, démontrer que pour tout entier naturel n on a
On pose P_n : « $B_n=10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^n)$ »
Initialisation :
Avec $n=0$ on a $B_n=B_0=10000$ par définition
et $10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^n)=10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^0)=10\,000$
donc P_0 vérifiée.
Hérédité :
Soit k un entier naturel tel que P_k soit vrai, montrons que dans ce cas P_{k+1} est vrai.
$B_{n+1}=B_n+x_{n+1}=B_n+1000\times 0{,}8^n$
$=10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^n)+1000\times 0{,}8^n$ (HR)
$=10\,000+5\,000-5000\times 0{,}8^n+1000\times 0{,}8^n$
$=10\,000+5\,000+4000\times 0{,}8^n$
$=10\,000+5\,000-5000\times 0{,}8^{n+1}$
$=10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^{n+1})$ donc P_{k+1} est vraie d'où l'hérédité
Conclusion :
Donc pour tout entier naturel n on a : $B_n=10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^n)$
▶4. La population d'herbivores peut elle doubler dans ce parc ? Justifier la réponse.
Pour que la population double il faudrait que $B_n\geq 20\,000 \Leftrightarrow 10\,000+5\,000\times(1-0{,}8^n)\geq 20000 \Leftrightarrow 5\,000\times(1-0{,}8^n)\geq 10\,000 \Leftrightarrow (1-0{,}8^n)\geq 2 \Leftrightarrow -1\geq 0{,}8^n$ ce qui est impossible, donc la population ne peut doubler

Exercice 4 – [5 points]

On rappelle que la page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

On nomme C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan, cette courbe est tracée sur la page 6 en annexe.

▶1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ qui sera positive strictement sur $]0;+\infty[$ par positivité de 1 et 1/x sur l'intervalle considéré. ainsi f sera croissante sur $]0;+\infty[$.

▶2. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A d'abscisse 1.

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{1}{1}\right)(x-1) + (1 + \ln 1) \Leftrightarrow y = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow$

$y = 2x - 1$.

b) Etudier les variations de la fonction h définie, sur $]0;+\infty[$, par $h(x) = \ln x - x + 1$. En déduire que la courbe C est en-dessous de la tangente Δ.

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ sera positive sur $]0;1]$ et négative après donc h sera croissante jusqu'à 1 ou elle s'annulera puis elle va décroitre , donc h sera négative ou nulle sur $]0;+\infty[$ or $h(x) = f(x) - y$ donc on en déduit que sur notre intervalle f sera inférieure à y et donc la courbe C sera sous sa tangente en 1.

c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe.

▶3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On note α_n cette solution. On a donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\alpha_n + \ln(\alpha_n) = n}$.

Soit n un entier naturel , on a bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq n \leq \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, de plus f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection il existe un unique antécédent α_n de n par f

b) Prouver que $\alpha_1 = 1$.

$f(1) = 1 + ln(1) = 1$, donc 1 est bien un antécédent de 1 , or on a prouvé que chaque entier avait un unique antécédent donc 1 est α_1 l'unique antécédent de 1 par f.

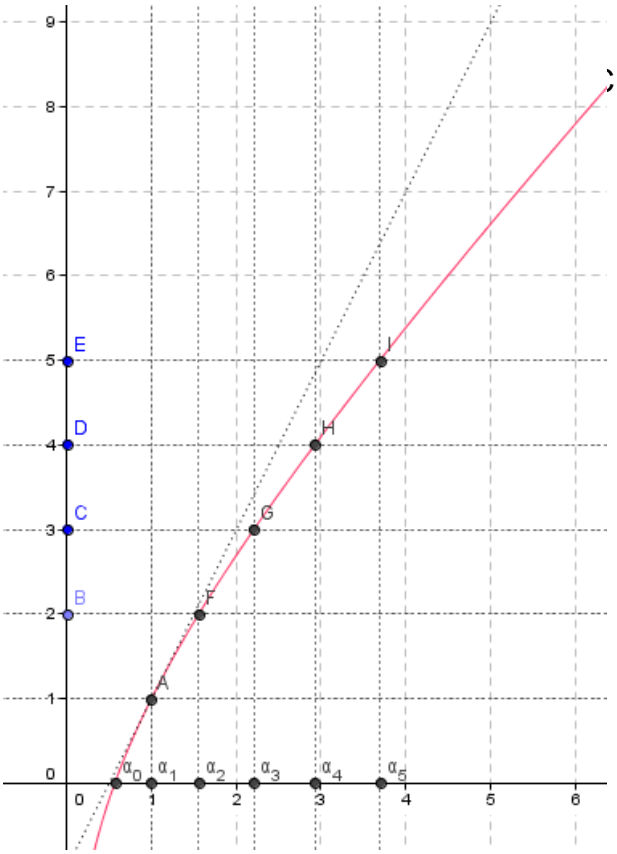
c) On rappelle que sur la page 6 en annexe, on a tracé la courbe C dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe de abscisses en laissant apparents les traits de construction.

▶4. a) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

Par l'absurde supposons qu'il existe k un entier naturel tel que $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ alors comme la fonction f étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre et donc $f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1})$ donc $k > k + 1$ ce qui est impossible donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$

b) En utilisant le résultat de la question 2b), démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

D'après la question 2b) $f(x) \leq 2x - 1$ sur $]0; +\infty[$. donc $f(\alpha_n) \leq 2\alpha_n - 1$ donc $n \leq 2\alpha_n - 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$

b) En déduire la limite de la suite (α_n).

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$