Entrainement DS 1

Exercice 1

1) Dériver les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{3}{x^8} + \frac{7}{x^9} - \frac{5}{x^{10}}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}, g(x) = \frac{x^2-3}{2x+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (8x^2 - 5)(2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{2x-3}{x^2+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 7$

2) Donner le tableau de variation des fonctions$f$ et j.

Exercice 2

Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 2^{3n-1}$

1) Déterminer b_0, b_1 et b_2 puis conjecturer la nature de la suite.
2) Prouver proprement votre conjecture (vous préciserez les paramètres de la suite)

Exercice 3 Complétez le tableau suivant :

En français	Définition par récurrence	Définition en fonction de n
(w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = \frac{2}{3}$		
		$t_n = 13 \times 0{,}85^{n-4}$
	$\begin{cases} u_{10} = 240 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$	
		$a_n = 2 \times 3^{2n+1}$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} 5(-0{,}4)^n$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -5(+7)^n$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (-4)^n$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - 0{,}90^n$

Exercice 3 Déterminer les sommes suivantes

a) $\begin{cases} u_0 = 240 \\ u_{n+1} = -0{,}5u_n \end{cases}$ S=$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ $S' = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

b) $\begin{cases} u_8 = \frac{1}{27} \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ S=$u_8 + u_9 + \cdots + u_{15}$ $S' = u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{19}$

Exercice 5

Le taux de croissance de la population française est de 0,5% depuis 2010, et on pense qu'il va rester stable jusqu'en janvier 2030. Au premier janvier 2010 la France était peuplée de 64 612 939 habitants

Soit la suite (u_n) qui à tout $n \geq 10$ associe l'effectif de la population française au premier janvier de l'année 2000+n.

1) Donner une définition par récurrence de la suite (u_n)
2) A quel type de suite à-t-on à faire ? Donner ses caractéristiques.
3) Donner une valeur approchée à l'unité près de u_{11}, u_{12}, u_{13}
4) Donner une expression de u_n en fonction de n
5) A l'aide de la suite prévoir la population au premier janvier 2016
6) Allez sur le site de l'INSEE et récupérez la vrai valeur, puis donner le pourcentage d'écart entre la valeur réelle (celle de l'INSEE, qui même provisoire sera considérée comme juste) et la valeur théorique.
7) Faire la somme des populations du premier janvier 2011 au premier janvier 2030
8) En déduire la population moyenne française sur cette période

Correction du Devoir maison T_{ES}

Exercice 1

1) Dériver les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{3}{x^8} + \frac{7}{x^9} - \frac{5}{x^{10}}$ $\qquad f'(x) = \frac{-3\times 8}{x^9} + \frac{-7\times 9}{x^{10}} - \frac{-5\times 10}{x^{11}} = -\frac{24}{x^9} - \frac{63}{x^{10}} + \frac{50}{x^{11}} = \frac{-24x^2-63x+50}{x^{11}}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}, g(x) = \frac{x^2-3}{2x+5}$

je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{(u'v-uv')}{v^2}$ avec $u(x) = x^2 - 3$, $v(x) = 2x + 5$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$

ainsi $g'(x) = \frac{2x(2x+5)-(x^2-3)2}{(2x+5)^2} = \frac{4x^2+10x-2x^2+6}{(2x+5)^2} = \frac{2x^2+10x+6}{(2x+5)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (8x^2 - 5)(2x + 3)$

je reconnais $uv \to u'v + uv'$ avec $u(x) = 8x^2 - 5$, $v(x) = 2x + 3$, $u'(x) = 16x$ et $v'(x) = 2$

ainsi $h'(x) = 16x(2x + 3) + (8x^2 - 5)2 = 32x^2 + 48x + 16x^2 - 10 = 48x^2 + 48x - 10$

$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{2x-3}{x^2+5}$

je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{(u'v-uv')}{v^2}$ avec $u(x) = 2x - 3$, $v(x) = x^2 + 5$, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$

ainsi $g'(x) = \frac{2(x^2+5)-(2x-3)2x}{(x^2+5)^2} = \frac{2x^2+10-4x^2+6x}{(x^2+5)^2} = \frac{-2x^2+6x+10}{(x^2+5)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 7$

$j'(x) = 5 \times 4x^3 - 8 \times 3x^2 + 2 \times 2x = 20x^3 - 24x^2 + 4x = 4x(5x^2 - 6x + 1)$

2) Donner le tableau de variation des fonctions f et j.

$f'(x) = \frac{-24x^2-63x+50}{x^{11}}$ cherchons le signe du numérateur $-24x^2 - 63x + 50$

$\Delta = (-63)^2 - 4(-24)50 = 3969 - 2400 = 1569$

donc le numérateur a deux racines $x_1 = \frac{63-\sqrt{1569}}{2\times(-24)} = \frac{63-\sqrt{1569}}{2\times(-24)} = \frac{63-\sqrt{1569}}{-48}$ et $x_2 = \frac{63+\sqrt{1569}}{-48}$ ici $x_2 < x_1 < 0$

x	$-\infty$		x_2		x_1		0		$+\infty$
$-24x^2-63x+50$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x^{11}		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	

$j'(x) = 4x(5x^2 - 6x + 1)$ cherchons le signe de $5x^2 - 6x + 1$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 36 - 20 = 16$

donc ce polynôme a deux racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{6+4}{10} = 1$ ici $0 < x_1 < x_2$

x		0		x_1		x_2		$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x^2-6x+1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$j'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$j(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Exercice 2

Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 2^{3n-1}$

1) $b_0 = 2^{3\times0-1} = \frac{1}{2}, b_1 = 2^{3\times0-1} = 4$ et $b_2 = 2^{3\times2-1} = 32$,
   $\frac{b_1}{b_0} = 8$ et $\frac{b_2}{b_1} = 8$. La suite semble être géométrique de raison 8 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$.
2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{3(n+1)-1}}{2^{3n-1}} = \frac{2^{3n+3-1}}{2^{3n-1}} = 2^{3n+3-1-(3n-1)} = 2^3 = 8$ ainsi $b_{n+1} = 8b_n$ la suite est donc bien géométrique de raison 8 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$

Exercice 3 Complétez le tableau suivant :

En français	Définition par récurrence	Définition en fonction de n
(w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = \frac{2}{3}$	$\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = \frac{2}{3}w_n \end{cases}$	$w_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$
(t_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $t_4 = 13$ ou de premier terme $u_0 = 13/0{,}85^4$	$\begin{cases} t_4 = 13 \\ t_{n+1} = 0{,}85\ t_n \end{cases}$	$t_n = 13 \times 0{,}85^{n-4}$
(u_n) est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme $u_{10} = -5$	$\begin{cases} u_{10} = 240 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$	$u_n = 240(-5)^{n-10}$
(a_n) est une suite géométrique de raison 9 et de premier terme $a_0 = 6$	$\begin{cases} a_{10} = 6 \\ a_{n+1} = 9a_n \end{cases}$	$a_n = 2 \times 3^{2n+1} = 6 \times (3^2)^n$

Exercice 3

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5(-0{,}4)^n$ Soit (u_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 5(-0{,}4)^n$ la suite est géométrique de raison -0,4 comprise strictement entre -1 et 1 et de premier terme $u_0 = 5$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -5(+7)^n$ Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 \times 7^n$ la suite est géométrique de raison 7 strictement plus grande que 1 et de premier terme $u_0 = 5$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} -5(+7)^n = \lim\limits_{x\to+\infty} -v_n = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-4)^n$ On est confronté à une suite géométrique de raison -4 strictement plus petite que -1 donc il n'y a pas de limite.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - 0{,}90^n$ Soit (w_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 \times (0{,}9)^n$ la suite est géométrique de raison 0,9 comprise strictement entre -1 et 1 et de premier terme $w_0 = 1$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}90^n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - 0{,}90^n = 5$ par différence.

Exercice 3 Déterminer les sommes suivantes

a) $\begin{cases} u_0 = 240 \\ u_{n+1} = -0{,}5u_n \end{cases}$ S=$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 240 \frac{1-(-0{,}5)^{21}}{1-(-0{,}5)} = 240 \frac{1-(-0{,}5)^{21}}{1{,}5} \approx 160$

$S' = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12} = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = 240(-0{,}5)^5 \frac{1-(-0{,}5)^{12-5+1}}{1-(-0{,}5)} = -7{,}5 \frac{1-(-0{,}5)^8}{1{,}5} \approx -5{,}02$

b) $\begin{cases} u_8 = \frac{1}{27} \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ S=$u_8 + u_9 + \cdots + u_{15} = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = u_8 \frac{1-q^{15-8+1}}{1-q} = \frac{1}{27} \frac{1-3^{15-8+1}}{1-3} = \frac{1}{27} \frac{1-3^8}{-2} \approx 121{,}48$

$S' = u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{19} = u_{11} \frac{1-q^{19-11+1}}{1-q} = u_8 3^3 \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1}{27} 9 \frac{1-3^9}{-2} = \frac{1-19683}{-6} \approx 3280{,}33$

Exercice5

Le taux de croissance de la population française est de 0,5% depuis 2010, et on pense qu'il va rester stable jusqu'en janvier 2030.

Au premier janvier 2010 la France était peuplée de 64 612 939 habitants

Soit la suite (u_n) qui à tout $n \geq 10$ associe l'effectif de la population française au premier janvier de l'année 2000+n.

1) $\begin{cases} u_{10} = 64\,612\,939 \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{0,5}{100}\right) \end{cases}$
2) C'est une suite géométrique de raison $q = \left(1 + \frac{0,5}{100}\right) = 1,005$ et de premier terme $u_{10} = 64\,612\,939$
3) $u_{11} \approx 64\,936\,004, u_{12} \approx 65\,260\,684, u_{13} \approx 65\,586\,987$
4) D'après la question 2) on a $u_n = u_{10} \times q^{n-10} = 64\,612\,939 \times 1,005^{n-10}$
5) au premier janvier 2016 la population sera $u_{16} 64\,612\,939 \times 1,005^{16} \approx 66\,575\,719$
6) sur le site de l'INSEE la vrai valeur est de 66 627 602, évaluons l'écart relatif entre les deux valeurs :
   $e = \frac{66\,575\,719 - 66\,627\,602}{66\,627\,602} 100 \approx -0,077$ l'écart entre la valeur théorique et la valeur réelle est de 0,0077%
7) $S_{11,30} = u_{11} + u_{12} + \ldots + u_{30} = u_{11} \frac{1 - 1,005^{30-11+1}}{1 - 1,005} = u_{10} 1,005 \frac{1 - 1,005^{20}}{1 - 1,005} = 64\,612\,939 \times \frac{1,005\left(1 - 1,005^{20}\right)}{-0,005} \approx$
   1 362 299 918Faire la somme des populations du premier janvier 2011 au premier janvier 2030
8) la population moyenne française sur cette période sera $\frac{S_{11,30}}{30-11+1} = \frac{S_{11,30}}{20} \approx 68\,114\,996$