Contrôle
exponentielle et logarithme

Exercice 1

Déterminez les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

g définie pour tout réel x de $]-\infty;-3[$ par $g(x)=\frac{x^2+10x-2}{x+3}$

h définie pour tout réel x de $]-\infty\,;+\infty[$ par $h(x)=e^x-x+3$

Exercice 2

Dériver deux des trois fonctions suivantes :

$f: x \to xln(x)-x$ définie sur $]0\,;+\infty[$en déduire une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

$g: x \to e^{x^2+3}+\frac{\ln x}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$

$h: x \to -50\times 0{,}4^x+70$

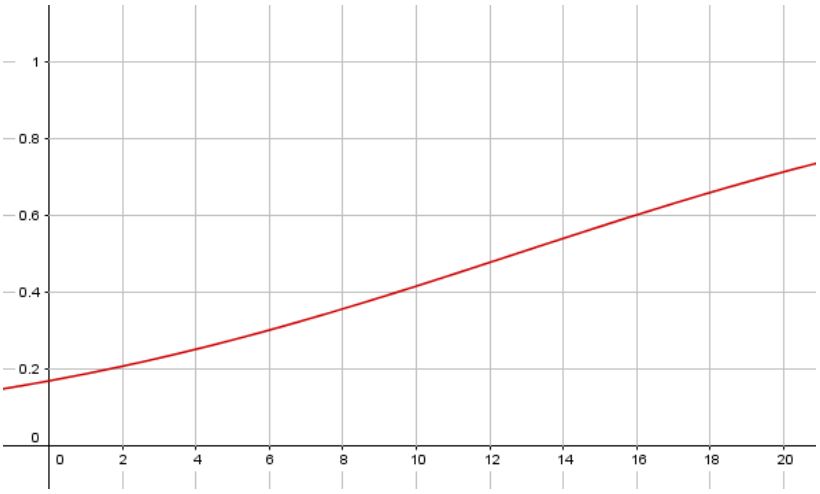
Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+3\leq 0$ $\qquad$ $3\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+e^x-10=0$

Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout t réel positif par $f(t)=\frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}}$, et C_f sa courbe représentative visible dans le repère ci-contre.



1) déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}125t}$

2) en déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$

3) quelle asymptote pouvez-vous en déduire, donnez son équation et tracez la.

4) complétez le tableau ci-dessous, en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

5) calculez la dérivée et en déduire que $f'(t)=\frac{0{,}6125e^{-0.125t}}{(1+4{,}9e^{-0.125t})^2}$

6) faire un tableau de variation de la fonction f

7) résoudre graphiquement (laissez les traits de constructions) l'équation $f(t)=0{,}5$

8) la résoudre maintenant par le calcul (arrondir au dixième)

Application (utilisez les résultats des questions précédentes):

Une étude statistique a établit qu'à partir de l'année 1990 le pourcentage de ménages équipé de four à micro-onde était donné par $f(t)=\frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}}$ avec t le nombre d'année écoulé depuis 1990.

9) donner le pourcentage arrondi à l'unité de foyers munis d'un four à micro-onde en 1990, 1995 et 2010

10) Dire à partir de quelle année plus de la moitié des foyers seront munis d'un four à micro-onde

Exercice 5

Donner les primitives des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ $\qquad$ $g(x)=7e^{5x-3}-4x+3$

Contrôle
Exponentielle et logarithme

Exercice 1 6min

Déterminez les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

g définie pour tout réel x de $]-\infty;-3[$ par $g(x)=\frac{x^2+10x-2}{x+3}$

$$g(x)=\frac{x^2+10x-2}{x+3}=\frac{x^2\left(1+\frac{10}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=x\frac{1+\frac{10}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{10}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3}x^2+10x-2=-27$ et $\lim\limits_{x\to-3}x+3=0^-$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-3}g(x)=+\infty$

h définie pour tout réel x de $]-\infty\,;+\infty[$ par $h(x)=e^x-x+3$

$h(x)=e^x-x+3=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+3=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)=1$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

Exercice 2 5 min

Dériver deux des trois fonctions suivantes :

$f:x\to xln(x)-x$ définie sur $]0\,;+\infty[$en déduire une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

$f'(x)=1\ln(x)+x\frac{1}{x}-1=\ln(x)$ donc une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ sera $xln(x)-x$

$g:x\to e^{x^2+3}+\frac{\ln x}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$

$g'(x)=2x\,e^{x^2+3}+\frac{\frac{1}{x}x-\ln x1}{x^2}=2x\,e^{x^2+3}+\frac{1-\ln x}{x^2}$

$h(x)=-50\times0{,}4^x+70=-50\,e^{\ln 0{,}4^x}+70=-50\,e^{x\ln 0{,}4}+70$

$h'(x)=-50\times\ln(0{,}4)\times e^{x\ln 0{,}4}$

Exercice 3 7min

$e^x+3\leq0$ $\Leftrightarrow e^x\leq-3$ cette équation n'a pas de solution car une exponentielle est toujours positive

$3e^{2x}+e^x-10=0\Leftrightarrow3(e^x)^2+e^x-10=0$ et en posant $X=e^x$

$\Leftrightarrow3X^2+X-10=0$

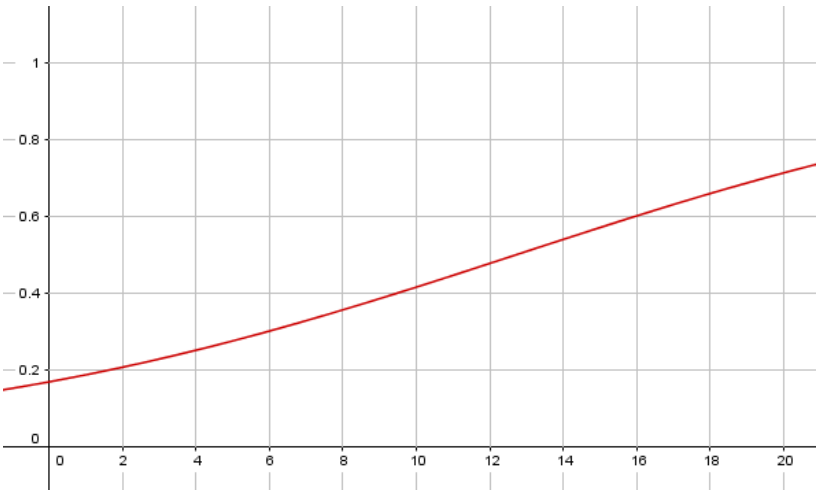
$$\Delta=b^2-4ac=1-4\times3\times(-10)=121=11^2$$

On aura deux solutions : $X_1=\frac{-1-\sqrt{121}}{6}=-\frac{12}{6}=-2$ et $X_2=\frac{-1+\sqrt{121}}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

Ainsi $3e^{2x}+e^x-10=0\Leftrightarrow X=-2$ ou $X=\frac{5}{3}\Leftrightarrow e^x=-2$ ou $e^x=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

Exercice 4 18min

Soit f la fonction définie pour tout t réel positif par $f(t)=\frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}}$, et C_f sa courbe représentative visible dans le repère ci-contre.



1) déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0{,}125t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}-0{,}125t=-\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty}e^y=0$

Donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0{,}125t}=0$

2) donc $\lim\limits_{t\to+\infty}1+4{,}9e^{-0{,}125t}=1$

Et donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{(1+4{,}9e^{-0{,}125t})}=1$

3) la courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=1$

4) complétez le tableau ci-dessous, en arrondissant

les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$	0,17	0,28	0,42	0,57	0,71	0,82	0,90

5) calculez la dérivée et en déduire que

Je reconnais $\frac{1}{v} \to -\frac{v'}{v^2}$ avec $v = 1 + 4{,}9e^{-0{,}125t}$ et $v' = 4{,}9(-0{,}125)e^{-0{,}125t}$ on a utilisé $e^u \to u'e^u$

Donc $f'(t) = \frac{4{,}9(-0{,}125)e^{-0{,}125t}}{(1+4{,}9e^{-0.125t})^2} = \frac{0{,}6125e^{-0.125t}}{(1+4{,}9e^{-0.125t})^2}$

6) faire un tableau de variation de la fonction f

La dérivée étant toujours positive la fonction sera croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ au bout de la flèche montante il y a $f(0) \approx 0{,}17$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+4{,}9e^{-0{,}125t})} = 1$

7) résoudre graphiquement (laissez les traits de constructions) l'équation $f(t) = 0{,}5$

Je trace la droite horizontale d'équation$y = 0{,}5$ et je regarde où est ce qu'elle coupe la courbe. Je trace une verticale passant par ce point ce qui me permettra de lire plus facilement l'abscisse de ce point , je vois environ 12,6

8) la résoudre maintenant par le calcul (arrondir au dixième)

$f(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}5} = 1 + 4{,}9e^{-0{,}125t} \Leftrightarrow 1 = 4{,}9e^{-0{,}125t} \Leftrightarrow \frac{1}{4{,}9} = e^{-0{,}125t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4{,}9}\right) = -0{,}125t$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{4{,}9}\right)}{-0{,}125} = t$ en arrondissant au dixième on a $t \approx 12{,}7$

Application (utilisez les résultats des questions précédentes):

Une étude statistique a établit qu'à partir de l'année 1990 le pourcentage de ménages équipé de four à micro-onde était donné par $f(t) = \frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125t}}$ avec t le nombre d'année écoulé depuis 1990.

9) donner le pourcentage arrondi à l'unité de foyers munis d'un four à micro-onde en 1990, 1995 et 2010

Je n'ai qu'à lire le tableau et convertir en pourcent les valeurs trouvées

En 1990 : 17% En 1995 : 28% et en 2010 : 90%

10) Dire à partir de quelle année plus de la moitié des foyers seront munis d'un four à micro-onde

C'est l'année pour laquelle on a pour la première fois $f(t) \geq 5$, l'égalité étant obtenue pour environ 12,7 , on dépassera les 50% la 13ème année donc en 2003.

Exercice 5 5min

$f(x) = \frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$Je reconnais $\frac{u'}{u} \to \ln(u)$ avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$ $G(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + c$

$g(x) = 7e^{5x-3} - 4x + 3 = \frac{7}{5}\, 5e^{5x-3} - 4x + 3$

Je reconnais $u'e^u \to e^u$ avec $u = 5x - 3$ et $u' = 5$

Donc $G(x) = \frac{7}{5}\, e^{5x-3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c = \frac{7}{5}\, e^{5x-3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c$