Correction d'exercices sur les suites

Exercice 19P309

1) $u_1 = 6{,}8$ $\quad u_2 = 6{,}6$ $\quad u_3 = 6{,}4$ $\quad u_4 = 6{,}2$
2) $u_n = 7 - \frac{n}{5}$
3) $u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{15} = \sum_{i=0}^{15} u_i = \frac{(u_0+u_{15})16}{2} = \left(7 + 7 - \frac{15}{5}\right)8 = 88$

Exercice 21P309

$\begin{cases} 33 = u_4 \\ 15 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 = u_0 + 4r \\ 15 = u_0 + 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 = 2r \\ 15 = u_0 + 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = r \\ 15 = u_0 + 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = r \\ 15 = u_0 + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = r \\ -3 = u_0 \end{cases}$

Exercice 22P309

$S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 5u_0 + 0 + r + 2r + 3r + 4r = 5u_0 + 10r$

$u_3 = u_0 + 3r$ nous avons donc :

$\begin{cases} 15 = S_4 \\ 5 = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 5u_0 + 10r \\ 5 = u_0 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 5u_0 + 10r \\ -25 = -5u_0 - 15r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 5u_0 + 10r \\ -10 = -5r \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 5u_0 + 10r \\ 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 5u_0 + 20 \\ 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 5u_0 \\ 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = u_0 \\ 2 = r \end{cases}$

Exercice 22P309

$S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 61 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{20} = S_{20}$ avec $u_n = 1 + 3n$

Donc $S = \frac{(u_0+u_{20})21}{2} = \frac{(1+61)21}{2} = 31 \times 21 = 651$

Exercice 23P309

$\begin{cases} 58\,500 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \\ 12\,000 = q_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 58\,500 = q_6 - 5r + q_6 - 4r + q_6 - 3r + q_6 - 2r + q_6 - r + q_6 \\ 12\,000 = q_6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 58\,500 = 6q_6 - 15r \\ 12\,000 = q_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 58\,500 = 6 \times 12\,000 - 15r \\ 12\,000 = q_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 58\,500 - 72\,000 = -15r \\ 12\,000 = q_6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -13\,500 = -15r \\ 12\,000 = q_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 900 = r \\ 12\,000 = q_6 \end{cases}$

Donc $q_1 = q_6 - 5r = 12\,000 - 5 \times 900 = 7\,500$, en 1992 la production était de 7 500 exemplaires.

Exercice 26P309

1) $u_1 = \frac{4}{3}$ $\quad u_2 = \frac{16}{3}$ $\quad u_3 = \frac{64}{3}$ $\quad u_4 = \frac{256}{3}$
2) $u_n = \frac{4^n}{3}$
3) $u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_9 = \sum_{i=0}^{9} u_i = \frac{(u_{10}-u_0)}{4-1} = \frac{1\,048\,575}{9}$

Exercice 27P309

$u_n = 2(-3)^n$ donc $u_1 = -6$ $\quad u_2 = 18$ $\quad u_3 = -54$ $\quad u_0 = 2$

Et donc $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2 - 6 + 18 - 54 = -40$

Exercice 28P309

$q = \frac{u_3}{u_2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ donc $u_4 = u_3 q = 9$ $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{8}{3}$ et $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{16}{9}$ donc

$S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{16}{9} + \frac{8}{3} + 4 + 6 + 9 = \frac{211}{9}$

Exercice 29P309

$\frac{64}{48} = \frac{3}{4}$ donc on a ici $q = \frac{3}{4}$ et $u_0 = 64$ $u_5 = \frac{243}{16}$

$S_5 = \frac{(u_6 - u_0)}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\frac{243}{16} \times \frac{3}{4} - 64}{\frac{-1}{4}} = \frac{\frac{729}{64} - \frac{4096}{64}}{\frac{-1}{4}} = \frac{\frac{-3367}{64} \times 64}{\frac{-1}{4} \times 64} = \frac{-3367}{-16} = \frac{3367}{16}$

Exercice 30P309

$\theta_n = 60 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$\theta_7 = 60 \times \left(\frac{8}{9}\right)^7 \approx 26{,}31°$

Exercice 31P310

1°)a)

$\lim_{x \to 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \ln(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (1 + \ln(x)) \frac{1}{x} = -\infty$

b)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0$

c) la limite en 0 indique que l'on a une asymptote verticale d'équation x=0, et celle en $+\infty$ nous indique qu'il y a une asymptote horizontale d'équation y=0

2°)a) b)

$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - (1 + \ln(x))1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$

Donc f' est positive sur $]0; 1]$ et négative sur $[0; +\infty[$ donc f est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

3°)a)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e}\left(1 + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\right) = \sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$

$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\frac{1}{x} x - (1 + \ln(x))1}{x^2} = \frac{-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = -e \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -e\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$

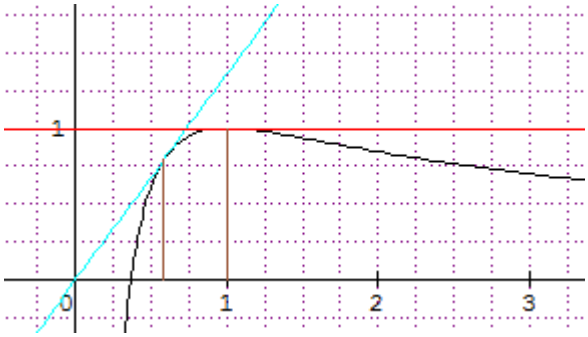
$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x$

c) si on veut que la tangente soit paralléle à l'axe des abscisses on doit chercher x tel que $f'(x) = 0$ donc x doit valoir 1.

d) $f'(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$ $f''(x) = \frac{\frac{-1}{x} x^2 - \ln(x) 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x + \ln(x) 2x}{(x^2)^2} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$

on aura donc $f''(\sqrt{e}) = \frac{2\ln(\sqrt{e}) - 1}{\sqrt{e}^3} = \frac{0}{\sqrt{e}^3} = 0$

$x_1 = e^{-1}; x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}; x_3 = 1; x_4 = \sqrt{e}$ sont les termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$



$g'(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{1}{x}\ln(x) = 2\frac{1+\ln(x)}{x} = 2f(x)$ donc $F(x) = \frac{1}{2}g(x) + c = \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$

Exercice 32 P310

1)a) $u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$

Donc la suite est arithmétique de raison 2

$u_0 = (2 \times 0 - 1) = -1$

b) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_0+n2)(n+1)}{2} = \frac{(2u_0+n2)(n+1)}{2}$

$= (u_0 + n)(n+1) = (-1+n)(n+1) = n^2 - 1$

2)a)

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1}-u_n} = e^2$ donc v_n est une suite géométrique de raison e^2 et on aura $v_0 = e^{u_0} = e^{-1}$

b) $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times e^{u_2} \times \ldots \times e^{u_n} = e^{u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n} = e^{S_n} = e^{n^2-1}$

Exercice 33P310

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - 0{,}01) = 0{,}99\, u_n$ donc u_n est une suite géométrique de raison 0,99

Et donc $u_n = u_0 \times 0{,}99^n$

Ainsi $u_1 = u_0 \times 0{,}99$ $\quad u_2 = u_0 \times 0{,}99^2$ $\quad u_3 = u_0 \times 0{,}99^3$ $\quad u_4 = u_0 \times 0{,}99^4$

Si $u_0 = 1000$

Ainsi $u_1 = 990$ $\quad u_2 = 980{,}1$ $\quad u_3 = 970{,}299$ $\quad u_4 = 960{,}59601$ $\quad u_5 = 950{,}99$

Ainsi on sait que l'ermite doit se situer à un tout petit peu plus de 500m au-dessus du niveau de la mer.

Exercice 35P311

Si on désigne par u_n et par v_n les populations en million des états unis et de la France on a à faire à des suites géométriques de raisons respectives 1,0079 et 1,0034 et de premier premiers termes $u_0 = 237{,}5$ et $v_0 = 55{,}1$.

En l'an 2000 les populations seront de $u_{15} = 237{,}5 \times 1{,}0079^{15} \approx 267{,}25$ et par $v_{15} = 55{,}1 \times 1{,}0034^{15} \approx 57{,}98$

Exercice 39P311

$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$ on veut :

a) $C_5 = 2C_0$ autrement dit on cherche i tel que $\left(1 + \frac{i}{100}\right)^5 = 2$ donc on veut $\left(\left(1 + \frac{i}{100}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}}$

Donc $1 + \frac{i}{100} = 2^{\frac{1}{5}}$ et donc $i = 100(2^{\frac{1}{5}} - 1) \approx 14{,}87$

b) $C_{10} = 2C_0$ autrement dit on cherche i tel que $\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{10} = 2$ donc on veut $\left(\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{10}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}$

Donc $1 + \frac{i}{100} = 2^{\frac{1}{10}}$ et donc $i = 100(2^{\frac{1}{10}} - 1) \approx 7{,}18$

Exercice 41P311

1) Si M = 20 alors on a : $20 = 10(\log d) + 1$ donc $19 = 10(\log d)$ et ainsi $1{,}9 = (\log d)$ et donc :

$d = 10^{1{,}9} \approx 79{,}43$ Millièmes de millimètres soit 0,079 millimètres

de la même manière si M = 50 $d = 10^{4{,}9} \approx 79432{,}82$ Millièmes de millimètres soit 79,43 millimètres

2) $M_1 = 21$, $M_2 = 22$, … M_{31}=51 et donc $M_n = 20 + n$

3) $d_n = 10^{\frac{M_n - 1}{10}}$ donc $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{10^{\frac{M_{n+1}-1}{10}}}{10^{\frac{M_n-1}{10}}} = 10^{\frac{M_{n+1}-1}{10} - \frac{M_{n+1}-1}{10}} = 10^{\frac{M_{n+1}-M_{n+1}}{10}} = 10^{\frac{20+n+1-(20+n)}{10}} = 10^{\frac{1}{10}}$

Donc d_n est une suite géométrique de raison $10^{\frac{1}{10}}$

Exercice 42 P312

$u_{n+1} - u_n = \big(-2(n+1) + 4 - (2n+4)\big) = -2 < 0$ la suite est donc décroissante.

$\lim_{n\to+\infty}(-2n+4) = -\infty$

Exercice 43 P312

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$ et $u_n > 0$ donc la suite est décroissante

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$

Exercice 44 P312

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-3(n+1)^2}{-3n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} > 1$ et $u_n < 0$ donc la suite est décroissante

$\lim_{n\to+\infty} -3n^2 = -\infty$

Exercice 46 P312

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4}{n+3}}{\frac{4}{n+1}} = \frac{n+1}{n+3} < 1$ et $u_n > 0$ donc la suite est décroissante

$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n+1} = 0$

Exercice 47 P312 $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

Exercice 48 P312 $\lim_{n\to+\infty} 3 - 0{,}2^n = 3$

Exercice 49 P312 $\lim_{n\to+\infty} 4 - 1{,}4^n = +\infty$

Exercice 50 P312 $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 1 = +\infty$

Exercice 51 P312 $\lim_{n\to+\infty} \frac{6-n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{6}{n}-1\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{6}{n}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -1$

Exercice 52 P312 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0^-$

Exercice 53 P312 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = 2$

Exercice 55 P312

$u_n = 1 \times 2^n$

$\ln(u_n) = \ln(2^n) = n\,ln(2)$ donc $\ln(u_n)$ est une suite arithmétique de raisont ln(2) et de premier terme 0

u_n comme $\ln(u_n)$ ont pour limite $+\infty$

$u_n > 10^{1\,000} \Leftrightarrow 2^n > 10^{1\,000}$ donc $\ln(2^n) > \ln\left(10^{1\,000}\right)$ $n\ln(2) > 10\,000\ln(10)$

$n\ln(2) > \frac{10\,000\ln(10)}{\ln(2)}$ or $\frac{10\,000\ln(10)}{\ln(2)} \approx 26\,690{,}98$ donc n doit valoir au moins 26 691