Correction des exercices sur les équations différentielles

Résoudre une équation différentielle de la forme y' = f(x) revient à chercher F une primitive de f

Exercice 7, 8 et 9 P379

y' = x – 2 $\quad$ y = $\frac{x^2}{2} - 2x + c$

y'= x² + x + 1 $\quad$ y = $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$

y'= sin(3x) $\quad$ $y = \frac{-\cos(3x)}{3} + c$

Exercices 10,11 et 12 P379

On impose maintenant que f(1) = 0, c'est en fait assez déroutant car f(x) est déjà fixé, donc en fait ce qui est demandé c'est de trouver y la fonction telle que y(1) =0 ou encore F la primitive s'annulant en 1.

y' = x + 3 $\quad$ y = $\frac{x^2}{2} + 3x + c$ donc y(1) = $\frac{1^2}{2} + 3 + c = \frac{7}{2} + c$ or on doit avoir y(1) = 0 donc c = $\frac{-7}{2}$ ainsi y = $\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}$

y'= x² - 1 $\quad$ y = $\frac{x^3}{3} - x + c$ donc y(1) = $\frac{1^3}{3} - 1 + c = c - \frac{2}{3}$ or on doit avoir y(1) = 0 donc c = $\frac{2}{3}$ ainsi y = $\frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

y'=e^x $\quad$ y=e^x+c $\quad$ donc y(1) =1+c $\quad$ or on doit avoir y(1) = 0 $\quad$ donc c = -1 ainsi y=$e^x - 1$

Exercices 13 à 17P379

ici on utilise la règle du cours les solutions des équations différentielles du genre y'=ay sont de la forme y = ke^{ax}

y'-2y=0 donc y = ke^{2x} $\quad$ y'=-y/4 donc y = k$e^{\frac{-x}{4}}$ $\quad$ y' + y = 0 donc y = ke^{-x}

x'-4x = 0 donc x = ke^{4t} $\quad$ $\frac{1}{2}x' = x$ donc x = ke^{2t}

Exercice 19P379

1) y'=-5y $\quad$ donc y = ke^{-5x}

2) on veut y(1) = e^{-10} donc k$e^{-5} = e^{-10}$ donc k = e^{-5} et ainsi f(x) = $e^{-5(x+1)}$ ou encore f(x) = $e^{-5}e^{-5x}$

3) on veut y'(1)=1 donc -5 ke^{-5}=1 et ainsi k = $\frac{-e^5}{5}$ et donc g(x) = $\frac{-e^5}{5}e^{-5x}$ et donc g(x) = $\frac{-e^{5(1-x)}}{5}$

Exercice 20P379

1) E1 : y = ke^{2x} et E2 : y = ke^x

2) a) y = ke^{2x} donc y' = 2ke^{2x} Si l'on cherche une solution de E1 avec f_1'(0) = 4 alors k = 2 et donc $f_1(x) = 4e^{2x}$

b) l'on cherche une solution de E2 avec $f_2(0) = 1$ alors k = 1 et donc $f_2(x) = e^{-x}$

3) f(x) = $f_1(x) - f_2(x) = 4e^{2x} - e^{-x}$ on veut résoudre f(x) = 0 ⇔ $4e^{2x} - e^{-x} = 0$ ⇔ $4e^{2x} = e^{-x}$ ⇔ 4= e^{-3x}

⇔ ln(4) = -3x ⇔ $x = \frac{\ln(4)}{-3}$

Exercice 21P379

1) y = ke^{-2x} $\quad$ 2) si f(0) = $\frac{1}{2}$ alors k = $\frac{1}{2}$ est donc f(x) = $\frac{1}{2}e^{-2x}$

3) $\int_0^a \frac{1}{2}e^{-2x}dx = -2$ ⇔ $\left[\frac{-1}{4}e^{-2x}\right]_0^a = -2$ ⇔ $\frac{-1}{4}e^{-2a} - \frac{-1}{4}e^0 = -2$ ⇔ $e^{-2a} - 1 = 8$ ⇔ -2a = ln(9) ⇔ a = (-1/2)ln(9)

⇔ a = -ln(3)

Exercice 22P379

On a donc ici –x' = 100kx ou encore x' = -100kx donc x(t) =Ce^{-100kt}

Si l'on veut x(0) = 5 on aura C = 5 donc x(t) =5e^{-100kt}

Exercice 23P380

1) N(t) = $Ce^{-\lambda t}$

2) Si N(0)= N_0 alors N(t) = $N_0e^{-\lambda t}$

3) On a N(T) = $\frac{1}{2}N_0$ et N(T) = $N_0e^{-\lambda T}$ donc : $\frac{1}{2}N_0 = N_0e^{-\lambda T}$ ⇔ $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$ ⇔ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T$ ⇔ $\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\lambda} = T$ ⇔ $\frac{\ln(2)}{\lambda} = T$

4) pour l'iode 131 T = 8,06 donc $\frac{\ln(2)}{\lambda} = 8{,}06$ ⇔ $\frac{\ln(2)}{8{,}06} = \lambda$ ⇔ $\lambda \approx 0{,}086$

Exercice 24P380

1a) y = ke^{-10x}

b) on a h solution de (E) donc h(t) = ke^{-10t} et de plus on a : h(0) = -1 donc h(t) = -e^{-10t}

On sait aussi que h(t) = i(t) – 1 donc i(t) = h(t) + 1 donc i(t) = 1 - e^{-10t}

2) la limite de i(t) quand t tend vers plus l'infini est de 1

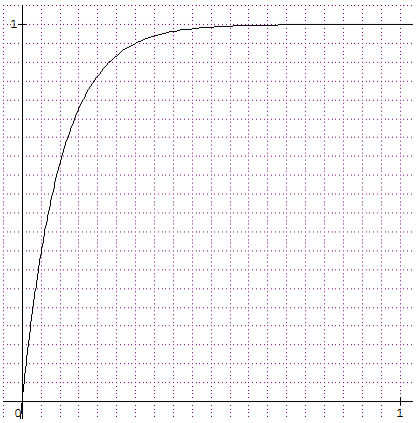
3) 1 étant une constante on aura : la courbe de i(t) qui admettra une tangente horizontale d'équation y = 1

i'(t) = 10e^{-10t} >0 donc i est croissante sur [0: +∞[

4)

5)

On veut i(t) = 0,5 ⇔ 1 - e^{-10t} = 0,5 ⇔ 0,5 = e^{-10t} ⇔ ln(0,5) = -10t ⇔ t = -ln(0,5)/10 ⇔ t = ln(2)/10



Exercice 25P381

Partie A

1a) y' + y = 0 ⇔ y = ke^{-x}

b) y(0) = 4 ⇔ 4 = ke^{-0} ⇔ 4 = k

g solution de l'équation différentielle y' + y = 0 et g(0) = 4 ⇔ g(x)= 4e^{-x}

2a) y' + 2y = 0 ⇔ y = ke^{-2x}

b) y'(0) = 2 ⇔ 2 = -2k$e^{-2\times 0}$ ⇔ -1 = k

h solution de l'équation différentielle y' + y = 0 et h'(0) = 2 ⇔ h(x)= -e^{-2x}

Partie B

1) f(x) = g(x) + h(x) = $4e^{-x} - e^{-2x} = e^{-2x}(4e^{+x} - 1) = \frac{4e^{+x}-1}{e^{2x}}$

2)on sait que $\lim_{x\to+\infty} 4e^{-x} = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4e^{-x} - e^{-2x} = 0$

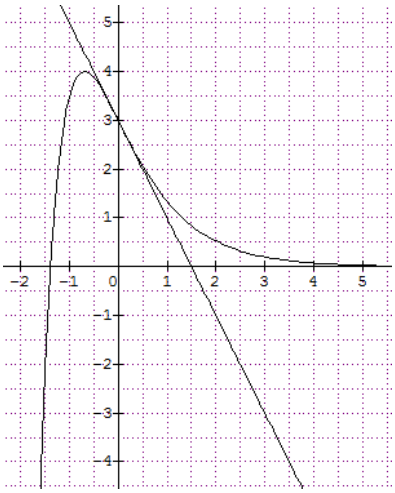
on sait que $\lim_{x\to-\infty} 4e^{x} - 1 = -1$ et que $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^{+}$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{+x}-1}{e^{2x}} = -\infty$

3) f'(x) =$-4e^{-x} + 2e^{-2x}$=$\frac{2-4e^{+x}}{e^{2x}} = \frac{2(1-2e^{+x})}{e^{2x}}$ donc f' est du signe de $1 - 2e^{+x}$ fonction décroissante, cherchons sa valeur d'annulation : $1 - 2e^{+x} = 0$ ⇔ x = ln(0,5)

Donc de $-\infty$ à ln(0,5) la dérivée est positive et donc f est croissante alors que de ln(0,5) à $+\infty$ la dérivée est négative et donc la fonction est décroissante.

F(ln(0,5)) = 8 – 4 = 4



Partie C

1) l'équation de cette tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est donnée par la formule :

y = f'(0)(x – 0) + f(0) donc y = -2x + 3

2) u(x) = 2x – 3 + $4e^{-x} - e^{-2x}$ donc u'(x) = $2 - 4e^{-x} + 2e^{-2x}$

Si on a u'(x) = $2(e^{-x} - a)^2$ alors $2 - 4e^{-x} + 2e^{-2x} = 2e^{-2x} - 4ae^{-x} + 2a^2$ par identification on trouve a = 1 Ainsi u'(x) = $2(e^{-x} - 1)^2$

3) donc u'>0 et donc u est une fonction croissante, de plus u(0) = 0

u(x) = f(x) –(-2x+3) donc u nous donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

Avant 0 u est négative donc C est sous D après 0 c'est le contraire.

Partie D

1) f(x) = 0 ⇔ $\frac{4e^{+x}-1}{e^{2x}} = 0$ ⇔ $4e^{+x} - 1 = 0$ ⇔ $e^{+x} = \frac{1}{4}$ ⇔ x = ln($\frac{1}{4}$) ⇔ x = -ln(4)

2) f(x) = $4e^{-x} - e^{-2x}$ donc F(x) =$-4e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$

F(-ln(4)) =-16 + 8 + c donc F(-ln(4))= 0 ⇔ c = 8⇔ F(x) =$-4e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + 8$

3) l'aire considérée est donnée par la formule : $A(\propto) = \int_{-\ln(4)}^{\propto} f(x)\,dx = F(\propto) - F(-\ln(4)) = F(\propto) = -4e^{-\propto} + \frac{1}{2}e^{-2\propto} + 8$

4) $\lim_{\propto\to+\infty} A(\propto) = \lim_{\propto\to+\infty} = -4e^{-\propto} + \frac{1}{2}e^{-2\propto} + 8 = 8$

5) $A(\propto) = 2$ ⇔ $-4e^{-\propto} + \frac{1}{2}e^{-2\propto} + 8 = 2$ ⇔ $-4e^{-\propto} + \frac{1}{2}e^{-2\propto} - 6 = 0$ ⇔ $-4e^{\propto} + \frac{1}{2} - 6e^{2\propto} = 0$

⇔ $\begin{cases} -4x + \frac{1}{2} - 6x^2 = 0 \\ e^{\propto} = x \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x = \frac{-2+\sqrt{7}}{6} ou \frac{-2-\sqrt{7}}{6} \\ e^{\propto} = x \end{cases}$ ⇔ $\propto = \ln\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{6}\right)$

Exercice 26P381

1) y' + 2y = 0 ⇔ y = ke^{-2x}

2) soit g(x) = ax + b, alors g'(x) = a, et donc g solution de E_1 ⇔ a + 2(ax + b) = x ⇔ 2ax + (a + b) = x ⇔ a = 0,5 et b = -0,5

h' + 2h = (f + g)' + 2(f+g) = f'+2f + g' +2g = 0 + x donc h' + 2h = x

Exercice 27P381

1) $L\frac{df}{dt} + Rf = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = -\frac{R}{L}f$ donc f = k$e^{-\frac{R}{L}t}$

2) g(t) = c donc g'(t) = 0, g sol de (1) $\Leftrightarrow L \times 0 + Rc = E \Leftrightarrow c = \frac{E}{R} \Leftrightarrow g(t) = \frac{E}{R}$

3) si je pose h = f + g alors Lh'+Rh = L(f + g)' + R(f+g) = Lf'+Rf + Lg' +Rg = 0 + E donc Lh' + Rh = E et donc h est sol de (1)

4) i(t) sol de (1) telle que i(0) = 0 $\Leftrightarrow$ i(t) = k$e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$ avec $ke^{-\frac{R}{L}0} + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow$ i(t) = $\frac{-E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \Leftrightarrow$ i(t) = $\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Exercices 30 à 33P382

Pour résoudre une équation différentielle de la forme y''=f(x) il suffit d'intégrer deux fois de suite f(x)

Ainsi on a : $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \quad y = -\frac{\cos(2x)}{4} + \lambda x + \mu \quad y = -\frac{\sin(3x)}{9} + \lambda x + \mu \quad y = e^x + \lambda x + \mu$

Exercice 34P382

f''(x)= $-\frac{1}{2K}\omega(2-x)^2$ donc f'(x) = $\frac{1}{6K}\omega(2-x)^3 + \lambda$ et donc f (x) = $\frac{-1}{24K}\omega(2-x)^4 + \lambda x + \mu$

Exercices 35à 38P382

Les solutions d'une équation différentielle du genre y''+ ω^2y=0 sont de la forme y=Acos(ωt) + Bsin(ωt)

$y = Acos(4t) + Bsin(4t)$ $\qquad$ $y = Acos(t/3) + Bsin(t/3)$

$y = Acos(5t/2) + Bsin(5t/2)$ $\qquad$ $y = Acos(13t/2) + Bsin(13t/2)$

Exercice 41P382

1) La solution générale de E est $y = Acos(5t) + Bsin(5t)$

2) grâce aux infos de l'énoncé on sait que $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

$y' = -5Asin(5t) + 5Bcos(5t)$ donc $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$ A=0 $\quad$ Et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow$ B = 5

Ainsi $y = 5sin(5t)$ et ici f(x) = 5 sin(5x)

Exercice 44P383

1) les solutions générales sont de la forme : f(t) = Acos(2t) + Bsin(2t)

f(0) = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ A = $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$Acos$\left(2\frac{\pi}{6}\right)$+ Bsin$\left(2\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{B\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{6}$

ainsi f(t) = $\frac{1}{2}$cos(2t) + $\frac{\sqrt{3}}{6}$sin(2t)

2) f(t) = 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}$cos(2t) + $\frac{\sqrt{3}}{6}$sin(2t) = 0 $\Leftrightarrow \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} \Leftrightarrow \tan(2t) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$ 2t = Arctan($-\sqrt{3}$) $[\pi] \Leftrightarrow$ 2t = $\frac{-\pi}{3}$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow$ t = $\frac{-\pi}{6}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 45P383

1) les solutions de l'équation différentielle y''+(1/9)y = 0 sont de la forme f(x) = $A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

2) on veut la solution particulière qui vérifie f(0) = 0 (donc 0 = A + 0) et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}1$ (donc 0 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1$)

Ainsi f(x) = 0,1 $\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

3) on veut résoudre 0,1 $\sin\left(\frac{1}{3}x\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{3}x\right) = 0{,}5 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{3}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ ou $\frac{1}{3}x = \pi - \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $[6\pi]$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$ $[6\pi]$

Exercice 55P383

1) les solutions de l'équation différentielle y''+4y = 0 sont de la forme y(t) = $A\cos(2t) + B\sin(2t)$

2) soit y = cos t donc y'' = -cos t et donc y'' + 4 y = 3 cos t donc y = cos t est bien une solution de (E_1)

3) soit f une solution de l'équation (E_0), et g la fonction définie par g(t) = f(t) + cos t , on aura donc g'' = f'' – cos t

Et donc g''+4g = f'' – cos t + 4f + 4cos t = (f'' + 4f) + 3 cos t = 3 cos t car f est solution de (E_0). Donc g est une solution de (E_1)

4) cherchons Aet B tels que g$\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et g'$\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow A\cos(2\pi) + B\sin(2\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $-2A\sin(2\pi) + 2B\cos(2\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$ A = 0 et 2B-1 = 1 $\Leftrightarrow$ B=1

Ainsi y(t) = $\sin(2t) + \cos(t)$