gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

TIGE – Chap 10. Equations différentielles

I. Equations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction. Par exemple, résoudre l'équation différentielle $f' = f$ consiste à rechercher toutes les fonctions égales à leur dérivée.
Notation : par convention, on note y au lieu de f ce qui donne $y' = y$.

Exemples.
 La pression atmosphérique décroit proportionnellement à l'altitude, donc $p'(h) = -\frac{g}{k}p(h)$ où $p(h)$ est la pression à l'altitude h, g est l'accélération de la pesanteur et k une constante.

 Le nombre d'atomes de radium qui se désintègrent en un temps donné est proportionnel à leur nombre à chaque instant, c'est à dire : $N'(t) = -aN(t)$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et a une constante positive.

Il existe ainsi de nombreuses situations dans lesquelles des phénomènes peuvent être modélisés par des équations du type $y' = ay$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Théorème.
Soit l'équation différentielle du premier ordre $y' = ay$ où a est un nombre réel, y une fonction et y' sa dérivée. La solution générale est de la forme $f(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle.

Exemple.
Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$

$$y' - 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = 3y$$

La solution générale est donc $f(x) = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$. (Je vérifie : $f'(x) = 3ke^{3x} = 3f(x)$)
Théorème.
Soit une équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel donné. Il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont donnés.

Exemple.
Déterminer la solution de l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ telle que $f(0) = 1$

$$2y' + 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{3}{2}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{3}{2}y$$

La solution générale est $f(x) = ke^{\frac{-3}{2}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
or $f(0) = 1$, $f(0) = ke^0 = k = 1$, la solution est donc $f(x) = e^{\frac{-3}{2}x}$.

II. Equations différentielles du second ordre

Théorème.
Soit l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un nombre réel, y une fonction et y'' sa dérivée seconde (la dérivée de la dérivée).
La solution générale est de la forme $f(x) = \mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x)$ où A et B sont des constantes réelles.

Exemple.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$
La solution générale est donc $f(x) = \mathrm{A}\cos(3x) + \mathrm{B}\sin(3x)$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$.
(Je vérifie : $f'(x) = -3\mathrm{A}\sin(3x) + 3\mathrm{B}\cos(3x)$ et $f''(x) = -9\mathrm{A}\cos(3x) - 9\mathrm{B}\sin(3x) = -9f(x)$)

Théorème.
Soit l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un nombre réel.
Il existe une unique solution vérifiant les conditions initiales $f(x_1) = y_1$ et $f'(x_2) = y_2$ où x_1, y_1, x_2 et y_2 sont donnés.

Exemple.
Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ telle que $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.
La solution générale est $f(x) = \mathrm{A}\cos(2x) + \mathrm{B}\sin(2x)$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$.
Or $f(0) = \frac{1}{2} = \mathrm{A}\cos 0 + \mathrm{B}\sin 0 = \mathrm{A}$ donc $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \mathrm{B}\sin(2x)$
$f'(x) = -\sin(2x) + 2\mathrm{B}\cos(2x)$ donc $f'(0) = \sqrt{3} = -\sin 0 + 2\mathrm{B}\cos 0 = 2\mathrm{B}$, donc $\mathrm{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
donc $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)$
De plus $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x)$ or $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
Donc $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
On obtient un signal sinusoïdal d'amplitude 1, de pulsation 2, de phase $-\frac{\pi}{3}$.
La fréquence est $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.