Correction du devoir maison

107 P 116

1a) on a $b_n = \frac{B}{(1+a)^n} = B\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ donc (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{1+a}$ et de premier terme : $b_1 = \frac{B}{1+a}$
Remarque : le fait que l'on utilise b_1 comme premier terme et non b_0 vient du fait que n désigne l'année qui vient de s'écouler.
b) $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-1}+q^n)$
$= (1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-1}+q^n) - (q+q^2+q^3+q^4\ldots q^n+q^{n+1})$
$= 1-q+q-q^2+q^2-q^3+q^3-q^4+\ldots+q^{n-1}-q^n+q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$
Donc $1+q+q^2+q^3+\ldots q^{n-1}+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
c) $b_1+b_2+\ldots+b_n = b_1(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})$ avec q la raison de la suite (b_n) i.e. $q = \frac{1}{1+a}$
$= b_1\frac{1-q^n}{1-q}$ en adaptant la formule démontrée à la question b
$= \frac{B}{1+a}\frac{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^n}{1-\frac{1}{1+a}} = B\frac{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^n}{1+a-1} = \frac{B}{a}\left(1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^n\right)$
2) a) pour calculer la somme des profits réalisés pendant les dix premières années on utilise $\frac{B}{a}\left(1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^n\right)$ avec
$B = 12\,000$ $a = 0{,}12$ et $n = 10$
$v = \frac{12000}{0{,}12}\left(1-\left(\frac{1}{1{,}12}\right)^n\right) = 100\,000\left(1-\left(\frac{100}{112}\right)^n\right)$ CQFD
b) $v \approx 67802$ pour que l'équipement soit amorti au bout de dix ans le prix d'achat doit être inférieur au gain prévu donc la machine doit coûter moins de 67 802 €

Exercice 134 P122
Partie A
1a) quand on choisit $n = 2$ et qu'on lance le programme il A et B valent 1 et 1 pour commencer, puis la boucle commence a son premier tour on assigne à A la valeur 4A = 4 et à B la valeur B+4=5. A son deuxième tour elle associe à A la valeur 4A = 16 et à B la valeur B+4=9. Puis le programme affiche les valeurs de A et B et on a bien celles qui sont annoncées dans l'énoncé.
b)

Valeur de n	0	1	2	3	4
Affichage pour A	1	4	16	64	256
Affichage pour B	1	5	9	13	17

2) $\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_{n+1} = A_n + 4 \end{cases}$ (A_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 1 donc $A_n = 4n+1$
$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_{n+1} = B_n \times 4 \end{cases}$ (A_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 1 donc $B_n = 4^n$
Partie B
P_1 : « pour tout n entier naturel, $4^n > 4n+1$ » ⇔« pour tout n entier naturel, $A_n > B_n$ »
Cette proposition est fausse car comme on peut le voir sur le tableau si n vaut 1 ou 0 l'inégalité $A_n > B_n$ est fausse.
P_2 : « pour tout n entier naturel, $4^n \leq 4n+1$ » ⇔« pour tout n entier naturel, $A_n \leq B_n$ »
Cette proposition est fausse car comme on peut le voir sur le tableau si n vaut 2 ou plus l'inégalité $A_n \leq B_n$ est fausse.
P_3 : « Il existe au moins un entier naturel n tel que : $4^n \leq 4n+1$ » ⇔« pour Il existe au moins un entier naturel n tel que : $A_n \leq B_n$ »
Cette proposition est vraie car comme on l'a vu plus haut si si n vaut 1 ou 0 l'inégalité $A_n \leq B_n$ est vraie
P_4 : « Il existe un unique entier naturel n tel que : $4^n \leq 4n+1$ » ⇔« Il existe un unique entier naturel n tel que : $A_n \leq B_n$ »
Cette proposition est fausse car comme on l'a vu plus haut si si n vaut 1 ou 0 l'inégalité $A_n \leq B_n$ est vraie donc le n n'est pas unique.

Exercice 137P123

1) Premiers termes
   a. En 2011 on aura $\frac{80}{100}25\ 000+20\ 000=20\ 000+20\ 000=40\ 000$
   b.

D2 | f_x =0,8*C2+20000

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424

   c. La formule serait pour une case donnée: =nom de la case juste à gauche * 0,8 +20 000, par exemple pour C2 j'écris : =0,8*B2+20000
2) Formalisation : création de la suite (U_n)
   a. $U_0-U_1=15000$ et $U_1-U_2=12000$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité, la suite n'est pas arithmétique.
   b. $\frac{U_1}{U_0}=1{,}6$ et $\frac{U_2}{U_1}=1{,}3$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant par la même quantité.
   c. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0=25000 \\ U_{n+1}=0{,}8U_n+20000 \end{cases}$
3) Nouvelle suite : (V_n)
   a. $V_0=100\ 000-U_0=75\ 000$
   b. On écrit dans B3 : « =100 000-A3 »
   c. Voir tableau
4) Nature de (V_n)
   a. Voir tableau
   b. (V_n) a l'aire bien géométrique de raison 0,8.
   c. En admettant la conjecture précédente on a : $V_n=V_0\times0{,}8^n=75\ 000\times0{,}8^n$

Année n	0	1	2	3	4	5
abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424
$\boldsymbol{V_n}$	75000	60000	48000	38400	30720	24576
$\boldsymbol{\frac{V_n}{V_{n-1}}}$		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8

5) Nouvelle formule de (U_n)
   a. On sait que $V_n=100\ 000-U_n$ donc $U_n=100\ 000-V_n=100\ 000-75\ 000\times0{,}8^n$
   b. En 2020, n=10 donc on aura $U_{10}=100000-75000\times0{,}8^{10}\approx91947$ abonnés