Nom & Prénom : ……………………………………………………………. www.dimension-k.com

Devoir surveillé : Suites

Exercice 1
Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_5 = 17$ et $w_{51} = -121$
Déterminer la raison et w_{13}

Exercice 2
On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = 2n + 3$ et $v_n = 7 \times 2^{3+n}$
Donner les natures et les caractéristiques des deux suites.

Exercice 3
On définit la suite à l'aide de l'algorithme suivant
Entrée : demander la valeur de N
Initalisation : on assigne à U la valeur 1
Traitement : pour I allant de 1 à N
On assigne à U la valeur du carré de la somme de U et de 3.
Sortie : Donner la valeur de U

1) Donner les premiers termes de la suite
2) Donner une définition par récurrence de la suite.

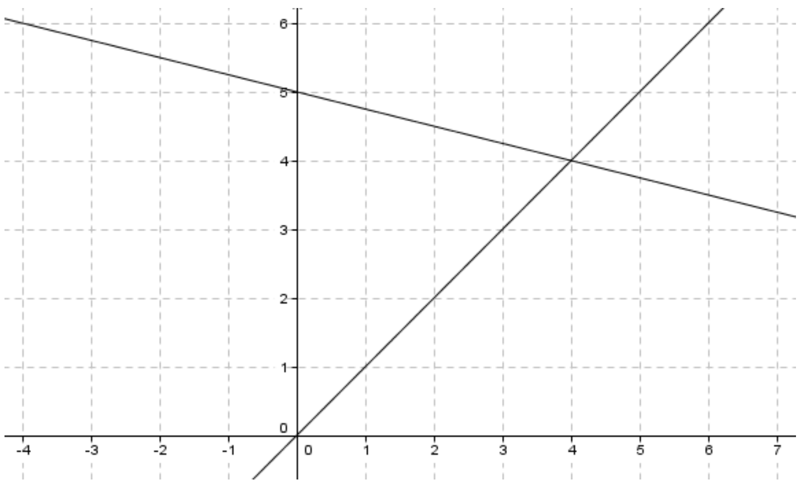
Exercice 4
Le 1er janvier 2000 on a planté un arbre. Le 1er janvier 2001 il avait grandi de 30cm. Sa croissance augmente de 10% tous les ans.
On pose u_n sa croissance durant l'année $(2000 + n)$ en cm. Par exemple pendant 2000 la croissance étant de 30cm on aura $u_0 = 30$.

1) Déterminer u_1 et u_2
2) Donner une définition par récurrence de (u_n) puis une en fonction de n.
3) Donner une approximation au millimètre près de l'augmentation de la taille durant l'année 2014
4) Donner une approximation de l'augmentation de la taille entre le moment où l'on a planté l'arbre et le premier janvier 2013.

Exercice 5 **La spirale infernale**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{u_n}{4} \end{cases}$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite
2) En déduire si La suite est croissante, décroissante ou aucun des deux
3) La suite est-elle géométrique, arithmétique ou aucun des deux ?
4) Construire graphiquement les premiers termes de la suite sur la figure ci-dessous (attention ça tourne !)
5) Lire approximativement ces valeurs
6) Vers quelle valeur semble converger la suite ?



Correction

Exercice 1 (3min)

Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_5 = 17$ et $w_{51} = -121$ Déterminer la raison et w_{13}

On utilise ici : $r = \frac{w_p - w_q}{p-q}$ et $w_p = w_q + (p-q)r$

$r = \frac{w_{51} - w_5}{51-5} = \frac{-121-17}{46} = -3$ $w_{13} = w_5 + (13-5)r = 17 + 8(-3) = -7$

Exercice 2 (3min)

On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = 2n+3$ et $v_n = 7 \times 2^{3+n}$

(u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

$v_n = 7 \times 2^{3+n} = 7 \times 2^3 \times 2^n = 56 \times 2^n$ donc (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 56$

Remarques :

trouver le premier terme est très facile : on remplace n par 0 dans l'expression de la suite en fonction de n.

Quand vous avez une idée de la suite, vous pouvez la vérifier en calculant deux termes consécutifs de la suite et en regardant comment on fait pour passer de l'un à l'autre. Ça n'est pas une preuve , mais ça aide bien.

Exercice 3 (5min)

On définit la suite à l'aide de l'algorithme suivant

Entrée : demander la valeur de N **Initialisation** : on assigne à U la valeur 1

Traitement : pour I allant de 1 à N On assigne à U la valeur du carré de la somme de U et de 3.

Sortie : Donner la valeur de U

1) Donner les premiers termes de la suite
2) Donner une définition par récurrence de la suite.

L'algorithme donne une relation importante qu'il vous faut

1) $u_0 = 1$, $u_1 = (u_0+3)^2 = 16,$ $u_2 = (u_1+3)^2 = 361$ $u_3 = (u_2+3)^2 = 131769$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n+3)^2 \end{cases}$

Remarque : beaucoup d'élèves ont été incapable d'interpréter : « le carré de la somme de U et de 3 ». C'est choquant !

Exercice 4 (7min)

Le 1er janvier 2000 on a planté un arbre. Le 1er janvier 2001 il avait grandi de 30cm. Sa croissance augmente de 10% tous les ans.

On pose u_n sa croissance durant l'année $(2000+n)$ en cm. Par exemple pendant 2000 la croissance étant de 30cm on aura $u_0 = 30$.

1) $u_1 = 30\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33$ et $u_2 = 33\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 36{,}3$
2) $\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = 1{,}1u_n \end{cases}$ donc $u_n = 30 \times 1{,}1^n$
3) $u_{14} = 30 \times 1{,}1^{14} \approx 113{,}9$, donc durant l'année 2014 l'arbre aura poussé de 113,9cm
4) Quand on parle de « l'augmentation de la taille entre le moment où l'on a planté l'arbre et le premier janvier 2013 » on fait référence à la croissance durant l'année 2000 c'est-à-dire u_0 plus celle de l'année 2001 (i.e. u_1) jusqu'à la croissance durant l'année 2012 (i.e. u_{12}) . La croissance recherchée est donc : $S_{12} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = \frac{u_0(1-1{,}1^{13})}{1-1{,}1} = \frac{30}{-0{,}1}(1-1{,}1^{13}) \approx 735{,}7$

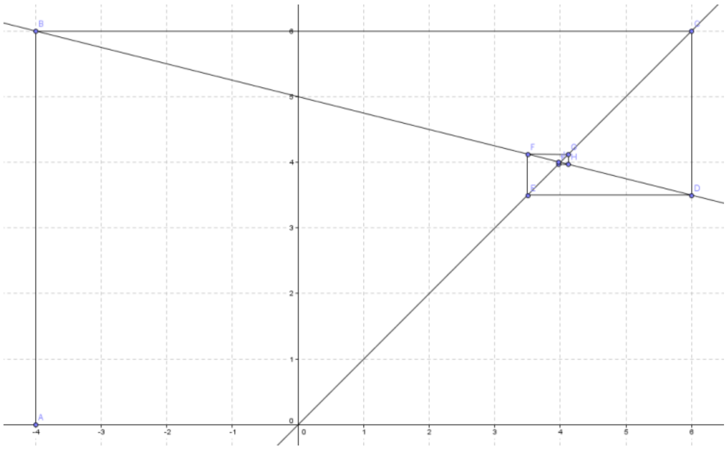
Remarque d'importants problèmes d'interprétation. Beaucoup ont mélangé taille et croissance. J'ai l'impression qu'ils se sont précipités sans essayer de se représenter la situation. . Autre problème : le lien entre le rang d'un terme de la suite et l'année correspondante en a troublé certains.

Exercice 5 La spirale infernale (10min)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{u_n}{4} \end{cases}$

1) $u_1 = 5 - \frac{u_0}{4} = 6$, $u_2 = 5 - \frac{u_6}{4} = 3{,}5$ et $u_3 = 5 - \frac{u_2}{4} = 4{,}125$
2) $u_2 - u_1 = -2{,}5 < 0$ et $u_3 - u_2 = 0{,}625 > 0$ donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.

3) $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc la suite est non arithmétique.
$\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{12}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{33}{28}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ donc la suite n'est pas géométrique.
4) Ci-contre
5) On lit $u_0 = -4$, $u_1 = 6$, $u_2 = 3{,}5$, $u_4 = 4{,}25$
6) Elle semble converger vers 4.



Remarque : attention à la rédaction.
Dans le devoir maison il y avait un exemple de rédaction pour savoir si la suite était géométrique ou arithmétique.