

Correction du DS 4 : Suites

Exercice 1 10min

Des personnes font caisse commune pour acheter un cadeau. La première donne 20€, la suivante 22€, la troisième 24€ et ainsi de suite.

On définit (v_n) la suite des dons, avec v_1 la somme donnée par la première personne.

- 1) (v_n) est arithmétique car on passe d'un terme au suivant en ajoutant 2€
- 2) $\begin{cases} v_1 = 20 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}$
- 3) $v_n = 20 + 2(n - 1) = 18 + 2n$
- 4) $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{20} = \frac{(v_1 + v_{20})20}{2} = (20 + 58)10 = 780$
- 5) la quantité mise dans la cagnotte par les 20 premières personnes est de 780€
- 6) $\frac{780}{20} = 39$ donc les personnes apportent en moyenne 39€.

Exercice 2 10min

Une suite est définie par l'algorithme suivant :

Entrée : n est un entier naturel

Initialisation U prend la valeur 13

Traitement : pour i variant de 1 à n , U prend la valeur $U \times 5$

Sortie : afficher U

- 1) Donner $u_0 = 13, u_1 = 65, u_2 = 325$ et $u_3 = 1625$
- 2) la suite est géométrique de raison 5 car on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant par 5.
- 3) $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$
- 4) Donner u_n en fonction de n, $u_n = 13 \times 5^n$

Exercice 3 30min

Soit (u_n) la série définie par $\begin{cases} u_0 = 72 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 100 \end{cases}$

- 1) Découverte de (u_n)
 - a. Déterminer $u_1 = 136, u_2 = 168$ et $u_3 = 184$.
 - b. $u_1 - u_0 = 64, u_2 - u_1 = 32$ or $64 \neq 32$ donc la suite n'est pas arithmétique.
 - c. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{17}{9}, \frac{u_2}{u_1} = \frac{21}{17}$ or $\frac{17}{9} \neq \frac{21}{17}$ donc la suite n'est pas géométrique.
- 2) Etude de (w_n) définie par $w_n = u_n - 200$
 - a. Calculer $w_0 = -128, w_1 = -64, w_2 = -32$ et $w_3 = -16$
 - b. la suite (w_n) semble géométrique de raison $\frac{1}{2}$
 - c. $w_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,5u_n + 100 - 200 = 0,5u_n - 100 = 0,5(u_n - 200) = 0,5w_n$
donc (w_n) est bien géométrique de raison 0,5 de plus $w_0 = -128$ ainsi : $w_n = -128 \times 0,5^n$ donc
 - d. $w_n = u_n - 200$ donc $u_n = w_n + 200 = -128 \times 0,5^n + 200$
- 3) Etude de (u_n)
 - a. $u_{n+1} - u_n = -128 \times 0,5^{n+1} + 200 - (-128 \times 0,5^n + 200) = -128 \times 0,5^{n+1} + 128 \times 0,5^n = 128 \times 0,5^n \times (-0,5) + 128 \times 0,5^n \times 1 = 128 \times 0,5^n(-0,5 + 1) = 128 \times 0,5^{n+1}$
or $128 \times 0,5^{n+1}$ est toujours positif donc (u_n) est croissante.
 - b. $-128 \times 0,5^n < 0 \Leftrightarrow -128 \times 0,5^n + 200 < 200 \Leftrightarrow u_n < 200$
 - c. $u_8 = -128 \times 0,5^8 + 200 = -0,5 + 200 = 199,5$ or (u_n) est croissante donc pour tout entier supérieur ou égal à 8, $u_n \geq u_8$ donc $u_n \geq 199,5$ donc $u_n \geq 199$