Chapitre 2

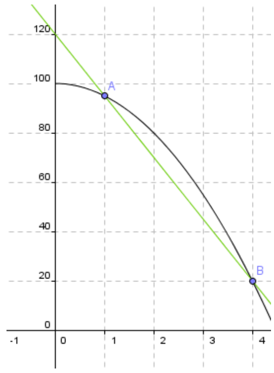
Dérivation. Etudes de fonctions.

I Nombre Dérivé – Tangente

Définition

Le taux de variation de la fonction f entre a et , avec $a \neq b$, est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Avec $b = a + h$, $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Exemple (en rapport avec l'activité d'introduction):
Soit f la fonction définie pour tout réel positif par : $f(x) = 100 - 5x^2$
Soient A et B les points d'abscisses 1 et 4, leurs ordonnées respectives sont donc :
…………………
Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 4 sera $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{80-95}{3} = -5$

Remarque

D'après le cours de 2nde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -5$, le taux de variation n'est autre que le coefficient directeur de la droite (AB).

Propriété

Soit C la courbe représentative de f, A et B deux points distincts de cette courbe d'abscisses respectives a et b, alors le taux de variation entre a et b : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

Comme nous avons pu le voir dans l'activité , plus B se rapproche de A (autrement dit plus h se rapproche de 0), plus la droite (AB) se rapproche d'une droite particulière, n'ayant qu'un point de contact (local) avec la courbe en A.

Définition

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proche de zéro, avec $h \neq 0$, les nombres $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proche d'un nombre fixé l.
Nous dirons alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et il vaut $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple

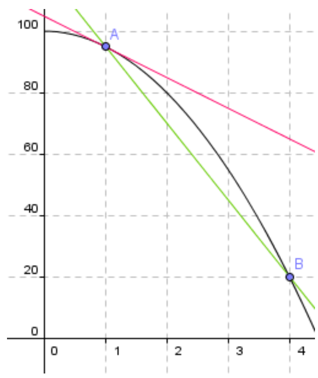
On considère la fonction f de l'exemple précédent. Et a = 1
Alors $f(1+h) = 100 - 5(1+h)^2 = 100 - 5(1 + 2h + h^2) = 95 - 10h - 5h^2$
Et $f(1) = 100 - 5 \times 1^2 = 95$ donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{95-10h-5h^2-95}{h} = \frac{-10h-5h^2}{h} = -10 - 5h$ donc quand h se rapproche de 0 , le taux de variation se rapproche de -10.
On a donc $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -10 - 5h = -10$

Définition

Soit f une fonction et C sa courbe représentative.
La droite Δ qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe C

Exemple

Pour la tangente Δ en A à la courbe des exemples précédents, son coefficient directeur est -10.
Son équation est donc $y = -10x + p$
Pour déterminer l'ordonnée à l'origine , je garde en tête que cette droite passe par A$(1, f(1))$ avec $f(1) = 95$
Et on a donc $95 = -10 \times 1 + p$ et donc $p = 105$.
Notre tangente a donc pour équation $y = -10x + 105$



II Dérivées de fonctions usuelles

Définition

f est une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.
Alors la fonction $x \to f'(x)$, notée f' est appelée fonction dérivée de f sur I.

Propriété

Dans le tableau ci-dessous sont compilées des fonctions de base et leur dérivées

<u>Fonction</u>	<u>Dérivée</u>
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n \; n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$

On peut demander aux élèves de démontrer ces formules sauf les deux dernières (racine peut tout de même se traiter avec la quantité conjuguée).

III Opérations

Propriété

Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur I et k un réel ,

alors les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur I et on a : $\begin{cases} (\boldsymbol{ku})' = \boldsymbol{k\,u'} \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \\ (\boldsymbol{u\,v})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{u\,v'} \end{cases}$

Si la fonction de plus $\boldsymbol{v}$ ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}$ et $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ sont dérivables sur I et : $\begin{cases} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \\ \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v - uv'}}{\boldsymbol{v}^2} \end{cases}$

Exemples

IV Applications aux variations d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.

Pour démontrer qu'une fonction f est **strictement croissante** sur I, il suffit de démontrer que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
$f(a)$ est le maximum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.
$f(a)$ est le minimum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$.

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un point distinct de ses extrémités.
Dire que la fonction f admet un maximum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \leq f(c)$
Dire que la fonction f admet un minimum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \geq f(c)$

Propriété
• Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0 distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$.
• Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.