VARIABLES ALÉATOIRES

Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues possibles E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : X = 2
Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : X = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.
Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X=5)$, $P(X=-1)$ et $P(X \leq 2)$.

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X=x_i)$.

Remarque : Les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire
On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Établir la loi de probabilité de X.

Partie 2 : Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X=x_i)$.

- L'**espérance** de X est : $E(X) = p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + \ \dots\ + p_n\,x_n$
- La **variance** de X est : $V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \ \dots\ + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2$
- L'**écrt-type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.
X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.
1) Calculer l'espérance de X.
2) Donner une interprétation du résultat.
3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Propriétés de linéarité (non exigible) :
Soit une variable aléatoire X. Soit a et b deux nombres réels. On a :
$E(aX+b)=aE(X)+b$ $\qquad$ $V(aX+b)=a^2V(X)$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.