Devoir Maison Facultatif

Pour le 18 décembre

Exercice 1 : équation et inéquations avec des valeurs absolues.

1) Résoudre $|7 - x| > 4$ et $|x + 3| \leq 7$
2) Résoudre l'équation $|1 + x| = |x - 5|$avec les distances et passer à la question 3) ou avec une étude de cas qu'il faudra compléter avec les questions subsidiaires suivantes :
    a. Placer la solution et les points d'abscisse -3 et 5 sur une droite.
    b. Que peut-on remarquer ?
    c. Explique en utilisant la notion de distance.
3) Résoudre $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| = |-5 + x|$
4) Bonus : Résoudre $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

Exercice 2 : dérivées en $\boldsymbol{a}$ une valeur précisée

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$, déterminer si f est dérivable en $a = -3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?
2) Soit g la fonction définie sur $[-1{,}5; +\infty[$ par$g(x) = \sqrt{2x + 3}$, déterminer si g est dérivable en $a = 3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Exercice 3 : dérivées en $\boldsymbol{a = x_0}$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, montrer qu'en $x_0 = a$, f a pour dérivée $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par$g(x) = \frac{1}{x}$, déterminer si g est dérivable en $a = x_0$ différent de 0. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Devoir Maison Facultatif

Pour le 18 décembre

Exercice 1 : équation et inéquations avec des valeurs absolues.

1) Résoudre $|7 - x| > 4$ et $|x + 3| \leq 7$
2) Résoudre l'équation $|1 + x| = |x - 5|$avec les distances et passer à la question 3) ou avec une étude de cas qu'il faudra compléter avec les questions subsidiaires suivantes :
    a. Placer la solution et les points d'abscisse -3 et 5 sur une droite.
    b. Que peut-on remarquer ?
    c. Explique en utilisant la notion de distance.
3) Résoudre $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| = |-5 + x|$
4) Bonus : Résoudre $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

Exercice 2 : dérivées en $\boldsymbol{a}$ une valeur précisée

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$, déterminer si f est dérivable en $a = -3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?
2) Soit g la fonction définie sur $[-1{,}5; +\infty[$ par$g(x) = \sqrt{2x + 3}$, déterminer si g est dérivable en $a = 3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

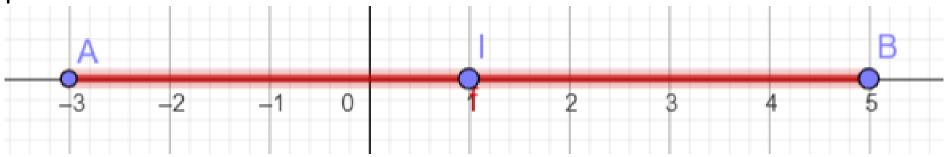
Exercice 3 : dérivées en $\boldsymbol{a = x_0}$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, montrer qu'en $x_0 = a$, f a pour dérivée $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par$g(x) = \frac{1}{x}$, déterminer si g est dérivable en $a = x_0$ différent de 0. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Correction

Exercice 1 : équation et inéquations avec des valeurs absolues.

1) $|7-x|>4 \Leftrightarrow d(7;x)>4 \Leftrightarrow x<7-4$ ou $x>7+4$
$S=]-\infty;3[\cup]11;+\infty[$
$|x+3|\leq 7 \Leftrightarrow |x-(-3)|\leq 7 \Leftrightarrow d(x;-3)\leq 7$
$\Leftrightarrow -3-7\leq x\leq -3+7 \Leftrightarrow -10\leq x\leq 4$ $\qquad S=[-10;4]$
2) $|1+x|=|x-5| \Leftrightarrow |x-(-1)|=|x-5| \Leftrightarrow d(x;-1)=d(x;5)$
$\Leftrightarrow$ x est le point de la droite des réels à égale distance des points A et B d'abscisses respectives -3 et 5, il est donc au milieu du segment $[AB]$: le point I d'abscisse 1



3) Résoudre $|-2x-13|-|5x-4|=|-5+x|$
$-2x-13\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq 13 \Leftrightarrow x\leq \frac{13}{-2}$
$5x-4\geq 0 \Leftrightarrow 5x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq \frac{4}{5}$
$-5+x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$

Intervalles	$]-\infty;\frac{13}{-2}]$	$\left[\frac{13}{-2};\frac{4}{5}\right]$	$\left[\frac{4}{5};5\right]$	$[5;+\infty[$
$-2x-13$	$-$	$+$	$+$	$+$
$5x-4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-5+x$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\lvert -2x-13\rvert$	$-2x-13$	$2x+13$	$2x+13$	$2x+13$
$\lvert 5x-4\rvert$	$-5x+4$	$-5x+4$	$5x-4$	$5x-4$
$\lvert -5+x\rvert$	$5-x$	$5-x$	$5-x$	$-5+x$

Sur $]-\infty;\frac{13}{-2}]$, $|-2x-13|-|5x-4|=|-5+x|$
$\Leftrightarrow (-2x-13)-(-5x+4)=5-x$
$\Leftrightarrow -2x-13+5x-4=5-x \Leftrightarrow 3x-17=5-x$
$\Leftrightarrow 3x+x=5+17 \Leftrightarrow x=\frac{22}{4}$ $\qquad S_1=\left\{\frac{22}{4}\right\}\cap]-\infty;\frac{13}{-2}]=\emptyset$

Sur $\left[\frac{13}{-2};\frac{4}{5}\right]$, $|-2x-13|-|5x-4|=|-5+x|$
$\Leftrightarrow (2x+13)-(-5x+4)=5-x$
$\Leftrightarrow 2x+13+5x-4=5-x \Leftrightarrow 7x+9=5-x \Leftrightarrow 8x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{8}$
$S_2=\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cap\left[\frac{13}{-2};\frac{4}{5}\right]=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Sur $\left[\frac{4}{5};5\right]$, $|-2x-13|-|5x-4|=|-5+x|$
$\Leftrightarrow (2x+13)-(5x-4)=5-x \Leftrightarrow 2x+13-5x+4=5-x$
$\Leftrightarrow -3x+x=5-17 \Leftrightarrow -2x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{-2}$
$S_3=\{6\}\cap\left[\frac{4}{5};5\right]=\emptyset$

Sur $[5;+\infty[$, $|-2x-13|-|5x-4|=|-5+x|$
$\Leftrightarrow (2x+13)-(5x-4)=-5+x \Leftrightarrow 2x+13-5x+4=-5+x$
$\Leftrightarrow -3x-x=-5-17 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-4}=\frac{-22}{-4} \Leftrightarrow x=\frac{11}{2}$
$S_4=\left\{\frac{11}{2}\right\}\cap[5;+\infty[=\left\{\frac{11}{2}\right\}$

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{\frac{11}{2}\right\}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right\}$$

Exercice 2 : dérivées en a une valeur précisée

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\frac{1}{x+2}$, déterminer si f est dérivable en $a=-3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Pour $h\neq 0$, et $3+h\in D_f$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\frac{\frac{1}{-3+h+2}-\frac{1}{-3+2}}{h}$
$=\frac{\frac{1}{h-1}-(-1)\times\frac{h-1}{h-1}}{h}=\frac{\frac{1+(h-1)}{h-1}}{h}=\frac{h}{h-1}\frac{1}{h}=\frac{1}{h-1}$
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h-1}=\frac{1}{-1}$ donc f est dérivable en -3 et $f'(-3)=-1$

2) Soit g la fonction définie sur $[-1{,}5;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{2x+3}$, déterminer si g est dérivable en $a=3$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Pour $h\neq 0$, et $3+h\in D_g$,
$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{g(3+h)-g(3)}{h}=\frac{\sqrt{2(3+h)+3}-\sqrt{2(3)+3}}{h}=\frac{\sqrt{6+2h+3}-\sqrt{9}}{h}$
$=\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}\frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3}=\frac{\sqrt{9+2h}^2-3^2}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)}$

$= \frac{2h}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \frac{2}{(\sqrt{9+2h}+3)}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2}{(\sqrt{9+2h}+3)} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

donc g est dérivable en 3 et $g'(-3) = \frac{1}{3}$

Exercice 3 : dérivées en $a = x_0$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, montrer qu'en $x_0 = a$, f a pour dérivée $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.

Pour $h \neq 0$, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-3(x_0+h)+4-(x_0^2-3x_0+4)}{h} =$
$\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-3x_0-3h+4-x_0^2+3x_0-4}{h} = \frac{2x_0h+h^2-3h}{h} = \frac{\mathrm{h}(2x_0+h-3)}{h} = 2x_0 + h - 3$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0 + h - 3 = 2x_0 - 3$

donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0 - 3$ comme prévu

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par$g(x) = \frac{1}{x}$, déterminer si g est dérivable en $a = x_0$ différent de 0. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Soit $x_0 \neq 0$.
Pour $h \neq 0$, et $x_0 + h \neq 0$

$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{1x_0}{(x_0+h)x_0}-\frac{1(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h} = \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}}{h} = \frac{-h}{(x_0+h)x_0}\frac{1}{h} = \frac{-1}{(x_0+h)x_0}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$

donc f est dérivable en x_0 non nul et $g'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$

Bonus

4) Résoudre $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

Création du tableau : voir question 3)

Sur $]-\infty; \frac{13}{-2}]$, $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

$\Leftrightarrow (-2\,x - 13) - (-5x + 4) \geq 5 - \mathrm{x}$

$\Leftrightarrow -2x - 13 + 5\mathrm{x} - 4 \geq 5 - \mathrm{x} \Leftrightarrow 3x - 17 \geq 5 - x$

$\Leftrightarrow 3x + x \geq 5 + 17 \Leftrightarrow x \geq \frac{22}{4}$ $\quad S_1 = [\frac{22}{4}; +\infty[\cap]-\infty; \frac{13}{-2}] = \emptyset$

Sur $\left[\frac{13}{-2}; \frac{4}{5}\right]$, $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

$\Leftrightarrow (2\,x + 13) - (-5x + 4) \geq 5 - \mathrm{x}$

$\Leftrightarrow 2x + 13 + 5x - 4 \geq 5 - x \Leftrightarrow 7x + 9 \geq 5 - x \Leftrightarrow 8x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{8}$

$S_2 = [-\frac{1}{2}; +\infty[\cap \left[\frac{13}{-2}; \frac{4}{5}\right] = \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right]$

Sur $\left[\frac{4}{5}; 5\right]$, $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

$\Leftrightarrow (2\,x + 13) - (5x - 4) \geq 5 - \mathrm{x} \Leftrightarrow 2x + 13 - 5x + 4 \geq 5 - x$

$\Leftrightarrow -3x + x \geq 5 - 17 \Leftrightarrow -2x \geq -12 \Leftrightarrow x \leq \frac{-12}{-2}$

$S_3 =]-\infty; 6] \cap \left[\frac{4}{5}; 5\right] = \left[\frac{4}{5}; 5\right]$

Sur $[5; +\infty[$, $|-2\,x - 13| - |5\,x - 4| \geq |-5 + x|$

$\Leftrightarrow (2\,x + 13) - (5x - 4) \geq -5 + \mathrm{x} \Leftrightarrow 2x + 13 - 5x + 4 \geq -5 + x$

$\Leftrightarrow -3x - x \geq -5 - 17 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} \leq \frac{-22}{-4} \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{2}$

$S_4 =]-\infty; \frac{11}{2}] \cap [5; +\infty[= \left[5; \frac{11}{2}\right]$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}; 5\right] \cup \left[5; \frac{11}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right]$$