1G Nom & Prénom : ……………………………………………………………………

Devoir Surveillé : dérivées en un point & valeurs absolues

Exercice 1 : valeurs absolues

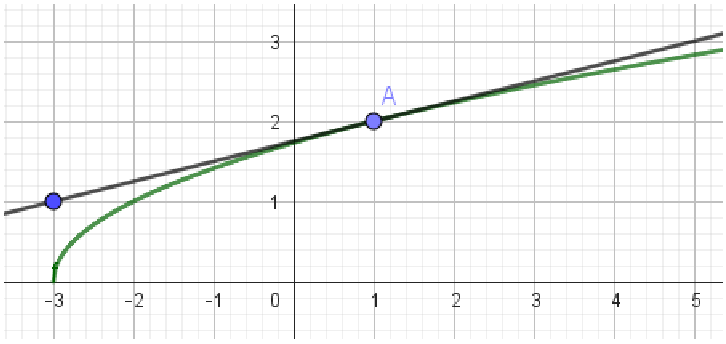
1) Résoudre $|x-5| = 2$ en utilisant une approche graphique, aucune phrase d'explication n'est nécessaire.
2) Au choix : résoudre $|7-x| \geq 4$ ou Résoudre $|x+6| < 2$
3) Résoudre $|2x-5| + |3x+4| = 8$

Exercice 2 : dérivée en $\boldsymbol{a}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$, déterminer si f est dérivable en $a = 2$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Exercice 3 : tangente et dérivées

Ci-contre vous pouvez trouver la courbe représentative de la fonction f ainsi que T_1 la tangente à cette courbe au point d'abscisses 1.



1) A l'aide du graphique déterminer $f(1)$ et $f'(1)$
2) En déduire l'équation de T_1

En fait f est la fonction définie sur D_f par $f(x) = \sqrt{x+3}$

3) Déterminer D_f
4) Retrouver $f'(1)$ par le calcul.

Bonus : résoudre $|2x-5| + |3x+4| > 8$ en vous appuyant sur la question 4) de l'exercice 1

1G Nom & Prénom : ……………………………………………………………………

Devoir Surveillé : dérivées en un point & valeurs absolues

Exercice 1 : valeurs absolues

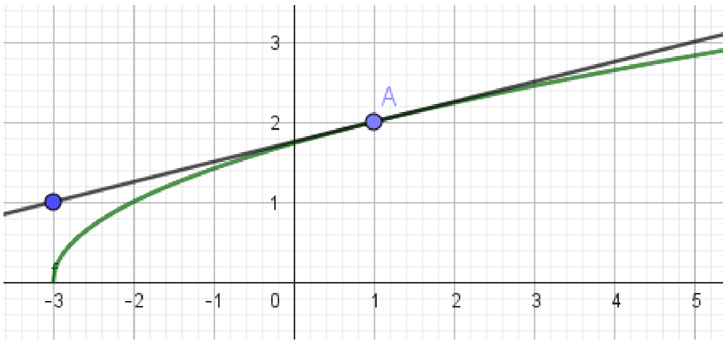
1) Résoudre $|x-5| = 2$ en utilisant une approche graphique, aucune phrase d'explication n'est nécessaire.
2) Au choix : résoudre $|7-x| \geq 4$ ou Résoudre $|x+6| < 2$
3) Résoudre $|2x-5| + |3x+4| = 8$

Exercice 2 : dérivée en $\boldsymbol{a}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$, déterminer si f est dérivable en $a = 2$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

Exercice 3 : tangente et dérivées

Ci-contre vous pouvez trouver la courbe représentative de la fonction f ainsi que T_1 la tangente à cette courbe au point d'abscisses 1.



1) A l'aide du graphique déterminer $f(1)$ et $f'(1)$
2) En déduire l'équation de T_1

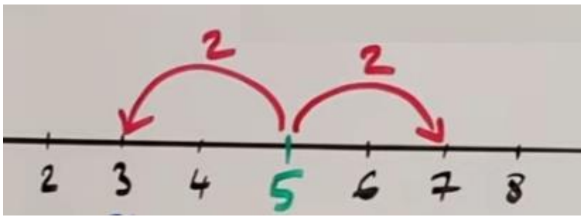
En fait f est la fonction définie sur D_f par $f(x) = \sqrt{x+3}$

3) Déterminer D_f
4) Retrouver $f'(1)$ par le calcul.

Bonus : résoudre $|2x-5| + |3x+4| > 8$ en vous appuyant sur la question 4) de l'exercice 1.

Interrogation

Exercice 1 : valeurs absolues



1) voir figure ci-contre. $S = \{3; 7\}$

2) $|7 - x| \geq 4$

Si $7 - x \geq 0 \Leftrightarrow 7 \geq x \Leftrightarrow 3 \geq x$ autrement $x \in]-\infty; 7]$

Alors $|7 - x| \geq 4 \Leftrightarrow 7 - x \geq 4 \Leftrightarrow 7 - 4 \geq x$

$\Leftrightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \in]-\infty; 3]$

$S_1 =]-\infty; 7] \cap]-\infty; 3] =]-\infty; 3]$

Sur $[7; +\infty[$, $|7 - x| \geq 4 \Leftrightarrow -7 + x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4 + 7 \Leftrightarrow x \geq 11 \Leftrightarrow x \in [11; +\infty[$

$S_2 = [7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty; 3] \cup [11; +\infty[$

3) $|x + 6| < 2$

Si $x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6 \Leftrightarrow x \in [-6; +\infty[$ alors $|x + 6| < 2 \Leftrightarrow x + 6 < 2 \Leftrightarrow x < 2 - 6$

$S_1 = [-6; +\infty[\cap]-\infty; -4[= [-6; -4[$

Si $x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -6 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -6]$ alors $|x + 6| < 2 \Leftrightarrow -x - 6 < 2 \Leftrightarrow -6 - 2 < x$

$S_2 =]-\infty; -6] \cap]-8; +\infty[=]-8; -6]$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 =]-8; -6] \cup [-6; -4[=]-8; -4[$

4) $|2x - 5| + |3x + 4| = 8$ (E_4)

$2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ $\qquad$ $3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

Intervalles	$]-\infty; -\frac{4}{3}]$	$\left[-\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right]$	$[\frac{5}{2}; +\infty[$
$\|2x - 5\|$	$-2x + 5$	$-2x + 5$	$2x - 5$
$\|3x + 4\|$	$-3x - 4$	$3x + 4$	$3x + 4$
$\|2x - 5\| + \|3x + 4\| = 8$	$-5x + 1 = 8$	$x + 9 = 8$	$5x - 1 = 8$

Sur $]-\infty; -\frac{4}{3}]$, $(E_4) \Leftrightarrow -5x + 1 = 8 \Leftrightarrow -5x = 8 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{-5}$ $\qquad$ $S_1 = \left\{\frac{7}{-5}\right\} \cap]-\infty; -\frac{4}{3}] = \left\{\frac{7}{-5}\right\}$

Sur $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right]$, $(E_4) \Leftrightarrow x + 9 = 8 \Leftrightarrow x = 8 - 9 \Leftrightarrow x = -1$ $\quad$ $S_2 = \{-1\} \cap \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right] = \{-1\}$

Sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$, $(E_4) \Leftrightarrow 5x - 1 = 8 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$ $\quad$ $S_3 = \left\{\frac{9}{5}\right\} \cap [\frac{5}{2}; +\infty[= \emptyset$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{\frac{7}{-5}; -1\right\}$

Exercice 2 : dérivée en a

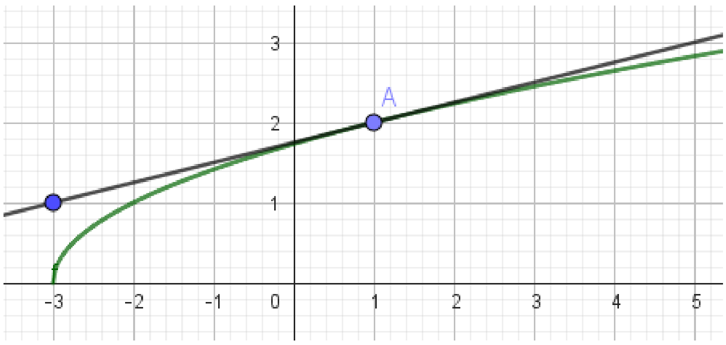
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$, déterminer si f est dérivable en $a = 2$. Si c'est le cas quelle est sa dérivée ?

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h-1} - \frac{1}{2-1}}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1} \times \frac{1+h}{1+h}}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{1+h}\frac{1}{h} = \frac{-1}{1+h}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -1$

Exercice 3 : tangente et dérivées

Ci-contre vous pouvez trouver la courbe représentative de la fonction f ainsi que T_1 la tangente à cette courbe au point d'abscisses 1.



1) $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$

En déduire l'équation de T_1

2) $y = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

En fait f est la fonction définie sur D_f par $f(x) = \sqrt{x + 3}$

3) f est définie quand $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ ainsi $D_f = [-3; +\infty[$

4) Retrouver $f'(1)$ par le calcul.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1+h+3}-\sqrt{1+3}}{h}=\frac{\sqrt{h+4}-\sqrt{4}}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}\frac{\sqrt{h+4}+2}{\sqrt{h+4}+2}=\frac{\sqrt{h+4}^2-2^2}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}=\frac{\mathrm{h}+4-4}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}=\frac{\mathrm{h}}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{h+4}+2\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{h+4}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{4}$

Bonus : $|2x-5|+|3x+4|>8\ (E_4)$

Intervalles	$]-\infty;-\frac{4}{3}]$	$\left[-\frac{4}{3};\frac{5}{2}\right]$	$[\frac{5}{2};+\infty[$
$\lvert 2x-5\rvert$	$-2x+5$	$-2x+5$	$2x-5$
$\lvert 3x+4\rvert$	$-3x-4$	$3x+4$	$3x+4$
$\lvert 2x-5\rvert+\lvert 3x+4\rvert>8$	$-5x+1\geq 8$	$x+9\geq 8$	$5x-1\geq 8$

Sur $]-\infty;-\frac{4}{3}]$,

$(E_4)\Leftrightarrow -5x+1>8\Leftrightarrow -5x>W8-1\Leftrightarrow x<\frac{7}{-5}$ $\qquad S_1=]-\infty;\frac{7}{-5}[\cap]-\infty;-\frac{4}{3}]=]-\infty;\frac{7}{-5}[$

Sur $\left[\frac{4}{3};\frac{5}{2}\right]$,

$(E_4)\Leftrightarrow x+9>8\Leftrightarrow x>8-9\Leftrightarrow x>-1$ $\qquad S_2=]-1;+\infty[\cap\left[-\frac{4}{3};\frac{5}{2}\right]=]-1;\frac{5}{2}]$

Sur $[\frac{5}{2};+\infty[$, $(E_4)\Leftrightarrow 5x-1>8\Leftrightarrow 5x>9\Leftrightarrow x>\frac{9}{5}$ $\qquad S_3=]\frac{9}{5};+\infty[\cap[\frac{5}{2};+\infty[=[\frac{5}{2};+\infty[$

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3=]-\infty;\frac{7}{-5}[\cup]-1;+\infty[$$

Approche visuelle (pour conjecturer ou vérifier le travail)