Devoir à la maison

À rendre le lundi 5 février 2024

Exercice 1.

1. On considère la fonction $u: x \rightarrow \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. On admet que u est dérivable sur$\mathbb{R}$.

En dérivant de deux façons différentes la fonction u^2, montrer que, pour tout réel x,

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. On considère la fonction $f: x \rightarrow \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. sans utiliser les formules $\sqrt{u} \rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $fog \rightarrow g' \times f'og$ justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère un carré ABCD de côté 4 cm.

On note M un point quelconque du segment [AB] et on pose $x = AM$.

Les segments [AC] et [DM] se coupent en un point I. On note H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle AMI et G le pied de la hauteur issue de I dans le triangle DIC.

On considère la fonction f qui à x associe l'aire totale recouverte par les deux triangles AMI et DIC.

1. Faire une figure.

2. Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

3. On pose $h = IH$.

a. En utilisant deux fois le théorème de Thalès, montrer que $\frac{h}{4-h} = \frac{x}{4}$.

b. En déduire que $h = \frac{4x}{x+4}$.

4. Montrer que, pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \frac{2(x^2+16)}{x+4}.$$

5. Justifier que f est dérivable sur D_f et montrer que, pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}.$$

6. Étudier les variations de f sur D_f .

7. Déterminer la position de M sur [AB] telle que l'aire totale recouverte par les triangles AMI et DIC soit minimale.

Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1.

1. Remarquons que, pour tout réel x, $u^2(x) = x^2 + 1$ donc $(u^2)'(x) = 2x$.
D'autre part, par théorème, pour tout réel x, $(u^2)'(x) = 2\,u'(x)\,u^{2-1}(x) = 2\,u'(x)\,u(x) = 2\,u'(x)\,\sqrt{x^2+1}$. Ainsi, pour tout réel x, $2\,u'(x)\,\sqrt{x^2+1} = 2x \Leftrightarrow u'(x) = \frac{2x}{2\,\sqrt{x^2+1}}$
On conclut donc que, pour tout réel x, $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. On considère la fonction $f : x \to \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$ donc f est le produit de la fonction polynôme $f : x \to \frac{1}{3}(x^2-2)$ et de la fonction u qui sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ De plus, pour tout réel x,

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x \times \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{3} \times (x^2-2) \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

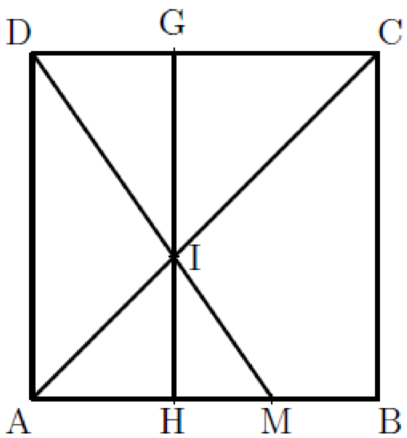
$= \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{x(x^2-2)}{3\,\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x\sqrt{x^2+1}^2}{3\sqrt{x^2+1}} + \frac{x(x^2-2)}{3\,\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x(x^2+1)+x(x^2-2)}{3\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^3+2x+x^3-2x}{3\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^3}{3\sqrt{x^2+1}}$

et donc, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de x^3. Or, $x^3 \leq 0$ si $x \leq 0$ et $x^3 \geq 0$ si $x \geq 0$. De plus $x^3 = 0$ si et seulement si $x = 0$ donc on conclut que f est strictement décroissante sur $]-\infty;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2.



1.

2. Comme M est un point quelconque du segment [AB], x varie dans $[0\,;\ 4]$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $D_f = [0\,;\ 4]$.

3. On pose h = IH.

a. Les droites (AM) et (CD) sont parallèles et les droites (DM) et (AC) sont sécantes en I donc, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IAM et IDC, on obtient : $\frac{IM}{ID} = \frac{AM}{CD} = \frac{x}{4}$.
Les droites (HM) et (DG) sont parallèles et les droites (DM) et (GH) sont sécantes en I donc, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IHM et IDG, on obtient $\frac{IM}{ID} = \frac{IH}{IG} = \frac{h}{4-h}$.
Ainsi, on conclut que $\frac{h}{4-h} = \frac{x}{4}$.

b. En utilisant les produits en croix, on en déduit que $4h = x(4 - h) = 4x - xh$ donc $4h + xh = 4x$ i.e. $h(4 + x) = 4x$ et ainsi $h = \frac{4x}{x+4}$.

4. On déduit des questions précédentes que, pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \frac{AM \times IH}{2} + \frac{CD \times IG}{2} = \frac{xh}{2} + \frac{4(4-h)}{2} = \frac{xh+16-4h}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x \times \frac{4x}{x+4} + 16 - 4 \times \frac{4x}{x+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4x^2 + 16(x+4) - 16x}{x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{4x^2 + 16x + 64 - 16x}{x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{4(x^2+16)}{x+4}$$

et donc, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{2(x^2+16)}{x+4}$.

5. La fonction f est le quotient des deux fonctions polynômes toutes deux dérivables sur D_f : $u: x \to 2(x^2 + 16)$ et $v: x \to x + 4$. De plus, v ne s'annule par sur D_f donc $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur D_f. De plus, pour tout $x \in D_f$, $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 1$ donc, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{4x(x+4)-2(x^2+16)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{4x^2+16x-2x^2-32}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+16x-32}{(x+4)^2}$

et donc, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}$

6. Pour tout $x \in D_f$, $(x+4)^2 > 0$et $2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $P(x) = x^2 + 8x - 16$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 128$ donc $P(x)$ a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-8-\sqrt{128}}{2\times 1} = \frac{-8-8\sqrt{2}}{2} = -4 - 4\sqrt{2}$

$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{128}}{2 \times 1} = \frac{-8+8\sqrt{2}}{2} = -4 + 4\sqrt{2}$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $P(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty; -4 - 4\sqrt{2}] \cup [-4 + 4\sqrt{2}; +\infty[$ et $P(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left[-4 - 4\sqrt{2}; -4 + 4\sqrt{2}\right]$. Comme *f* est définie seulement si $[0\ ;\ 4]$, on en déduit que $f'(x) \leq 0$ si $x \in \left[0; -4 + 4\sqrt{2}\right]$ que $f'(x) \geq$ $x \in \left[-4 + 4\sqrt{2}; 0\right]$.

On conclut donc que *f* est décroissante sur $\left[0; -4 + 4\sqrt{2}\right]$ et croissante sur $\left[-4 + 4\sqrt{2}; 0\right]$.

7. Ainsi, *f* admet un minimum global en $-4 + 4\sqrt{2}$ donc l'aire totale recouverte par les triangles A*MI* et D*I*C est minimale si et seulement si A*M* = $-4 + 4\sqrt{2}$.