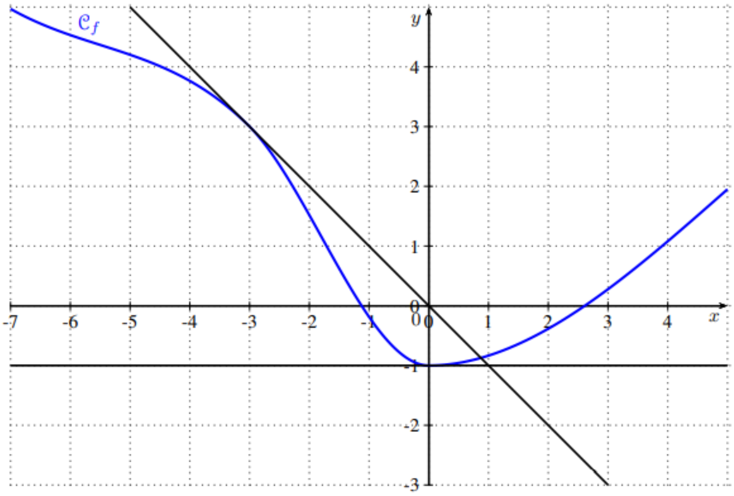
Nom & Prénom : ……………………………………………………………………………………………….

Devoir surveillé : dérivation

Exercice 1. Lectures graphiques — 5 points

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses −3 et 0.



Déterminer par lecture graphique et sans justification :

1. $f(0)$; 2. $f'(0)$;
3. $f(-3)$; 4. $f'(-3)$;
5. L'équation de la tangente au point d'abscisse −3.
6. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
7. Le signe de $f'(4)$ (Expliquer brièvement juste cette réponse).

Exercice 2. Avec le taux d'accroissement et les formules — 10 points

On considère la fonction g définie sur I par : $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Avec le taux d'accroissement :
   2. a. Montrer que pour tout réel h, le taux d'accroissement de g entre 3 et $3+h$ est : $t(h) = \frac{-5}{h+1}$
   2. b. En déduire le nombre dérivé de g en 3.
   2. c. Déterminer l'équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse 3.
3. Avec les formules de dérivation :
   3. a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g.
   3. b. Calculer la dérivée de g.
   3. c. Déterminer $g'(3)$ et retrouver ainsi le résultat de la question 2b).

Exercice 3. Avec $\sqrt{u}$ et l'ensemble de dérivabilité — 7 points

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{2}{x+5} + \sqrt{2x+4}$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer J, l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 4. Avec u^4 et les tangentes horizontales — 7 points

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = (x^2 - 5x + 4)^4$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f et son ensemble de dérivabilité.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Déterminer les abscisses des points de C_f qui admettent une tangente horizontale.

Exercice 5. Dérivations de fonction — 7 points

Dans cet exercice le domaine de dérivabilité sera noté D'. On s'intéresse aux fonctions :

$f(x) = -\frac{x^7}{14} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^2}{4} + x\sqrt{3}$ on a $D_f = D' = \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{7}{x^3} - \frac{1}{5x^2}$ on a $D_g = D' = \mathbb{R}$

$h(x) = (3x^2-2)^4(2x+5)^3$ on a $D_h = D' = \mathbb{R}$

Dériver les fonctions f, g et h (il faudra factoriser h' au maximum)

Bonus : $i(x) = 9x^2 - \frac{2}{(5x-7)^2}$ on a $D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$

Exercice 6. Coût marginal (Marginal Cost) 5 points

> Définition du Coût Marginal (Marginal Cost)
> En économie, le coût marginal pour une quantité q produite, est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, soit le coût de la $(q+1)^e$ unité : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$

Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, pour q objets produits est donné pour q positif par :

$$C(q) = 0,01q^2 + 3q + 3$$

1. Déterminer le Coût marginal $C_m(q)$.
2. Une approximation classique.

> Propriété
> Le coût marginal est souvent approché par la dérivée de la fonction coût total si cette dernière est bien dérivable. On a alors dans l'ensemble de définition : $C_m(q) \approx C'(q)$

Calculer ici la dérivée de la fonction coût total $C'(q)$.

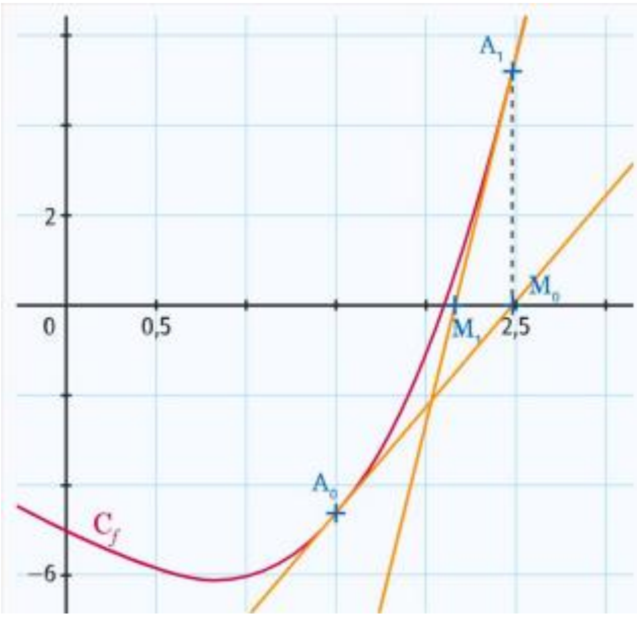
3. Calculer le coût marginal correspondant à la fabrication de 100 000 objets par la formule puis par son approximation mathématique. Quelle est l'erreur commise (exprimée en euros) ?

Exercice 7 : 2 points

Déterminer les réels tel que $\left(f(x)\right)^2 = f(f(x))$ où f est la fonction affine de dérivée 2 et dont l'image de 0 est 3.

Exercice 8. La méthode de Newton 5 points

Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.
On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



Description de la méthode

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
On considère le point A_0 de C_f d'abscisse 1,5. La tangente T_0 à C_f en A_0 coupe l'axe des abscisses en un point M_0 d'abscisse x_0.
On considère le point A_1 de C_f de même abscisse x_0 que M_0. La tangente T_1 à C_f en A_1 coupe l'axe des abscisses en un point M_1 d'abscisse x_1.
On réitère le procédé pour obtenir les abscisse x_0, x_1, x_2 ...
Ces valeurs vont se rapprocher de la solution α de l'équation $f(x) = 0$

Soit $a$un réel et A le point de C_f d'abscisse a. On admet que la tangente T à C_f en A n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

1. Vérifier que le point d'intersection M de T avec l'axe des abscisses a pour abscisse : $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.
2. On considère les fonction Python ci-dessous. Les deux premières définissent f (lignes 2 et 3) et la dérivée de f (lignes 4 à 7). La dernière (des lignes 9 à 15)est **newton(x_0, nb_etapes)**, qui prend en paramètre x_0 et le nombre d'étapes dans l'algorithme et retourne la liste $[x_0, x_1, x_2, \cdots]$. Recopier et compléter les lignes 7, 13 et 14.

<u>Aide : comprendre la syntaxe Python</u>

A la ligne 10 on a construit une liste de nb-etapes +1 éléments. Le premier sera valeurs[0], le suivant valeurs[1] et le dernier valeurs[nb_etapes]
A la ligne 11, le premier élément reçoit la valeur x_0
A partir de la ligne 12 à l'aide d'une boucle on va stocker successivement les valeurs x_1, x_2, … dans notre liste

lignes 7 : écrire f' avec les notations python
ligne 13 : x correspond à $x_{idValeur-1}$ l'abscisse de $M_{idValeur-1}$.
Ligne 14 : à partir de $x = x_{idValeur-1}$ on doit déterminer $x_{idValeur}$ l'abscisse du point suivant : $M_{idValeur}$

```
# Dans l'éditeur Python
def f(x):
    return x**3 - 2*x - 5
def f_prime(x):
5   '''IN : x : float
    OUT : f'(x)'''
    return .... # A recopier et compléter

def newton(x_0, nb_etapes):
10  valeurs = [0]*(nb_etapes + 1)
    valeurs[0] = x_0
    for idValeur in range(1 , nb_etapes+1):
        x = .... # A recopier et compléter
        valeurs[idValeur] = .... # A recopier et compléter
    return valeurs
```

Correction

Exercice 1. Lectures graphiques 5 points

Déterminer par lecture graphique et sans justification :

1. $f(0) = -1$; 2. $f'(0) = 0$; 3. $f(-3) = 3$; 4. $f'(-3) = -1$;

5. L'équation de la tangente au point d'abscisse -3 est évidente quand on regarde le graphique.

$T_{-3}: y = f'(-3)\big(x-(-3)\big) + f(-3) \Leftrightarrow y = -1(x+3)+3 \Leftrightarrow y = -x-3+3 \Leftrightarrow y = -x$

6. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

$T_0 : y = 0x - 1 \Leftrightarrow y = -1$

7. Le signe de $f'(4)$ (Expliquer brièvement juste cette réponse).

La fonction est croissante en $x = 4$ donc la dérivée en $x = 4$ sera positive.

Exercice 2. Avec le taux d'accroissement et les formules 10 points

On considère la fonction g définie sur I par : $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$

1. l'ensemble de définition de g est constitué de toutes les valeurs n'annulant pas le dénominateur. $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc : $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

2. Avec le taux d'accroissement :

2. a. $t(h) = \frac{g(3+h)-g(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{3+h+3}{3+h-2} - \frac{3+3}{3-2}}{h} = \frac{\frac{6+h}{1+h} - \frac{6}{1}}{h} = \frac{\frac{6+h}{1+h} - \frac{6(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{\frac{6+h-6-6h}{1+h}}{h} = \frac{-5h}{1+h}\frac{1}{h} = \frac{-5}{1+h}$

2. b. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{3+h-3} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-5}{1+h} = -5$ ainsi g est dérivable en 3 et on a $g'(3) = -5$.

2. c. $T_3: y = g'(3)(x-3) + g(3) \Leftrightarrow y = -5(x-3)+6 \Leftrightarrow y = -5x+15+6 \Leftrightarrow y = -5x+21$

3. Avec les formules de dérivation :

3. a. g est un quotient de polynômes donc elle est dérivable sur R privé de toutes les valeurs annulant le dénominateur. $D' = D_{g'} = \mathbb{R} - \{2\}$

3. b. Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = x+3$, $u' = 1$, $v = x-2$ et $v' = 1$ donc sur D' on aura $g'(x) = \frac{1(x-2)-(x+3)1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$

3. c. $g'(3) = \frac{-5}{(3-2)^2} = \frac{-5}{1^2} = -5$ comme à la question 2b).

Exercice 3. Avec $\sqrt{u}$ et l'ensemble de dérivabilité 7 points

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{2}{x+5} + \sqrt{2x+4}$

1. Pour que f soit définie il faut que $\frac{2}{x+5}$ et $\sqrt{2x+4}$ le soient simultanément donc que $x+5 \neq 0$ et que $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{2}$ ainsi $I = (\mathbb{R} - \{-5\}) \cap [-2; +\infty[= [-2; +\infty[$

2. Pour que f soit dérivable il faut que $\frac{2}{x+5}$ et $\sqrt{2x+4}$ le soient simultanément donc que $x+5 \neq 0$ et que $2x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > \frac{-4}{2}$ ainsi $J = (\mathbb{R} - \{-5\}) \cap]-2; +\infty[=]-2; +\infty[$

3. Pour dériver f il me faut dériver :

* $\frac{2}{x+5}$ qui se fait avec la formule $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 2$, $u' = 0$, $v = x+5$ et $v' = 1$ ce qui donne : $\frac{0(x+5)-2\times 1}{(x+5)^2} = \frac{-2}{(x+5)^2}$.

* $\sqrt{2x+4}$ qui se fait avec la formule $\sqrt{u} \to \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = 2x+4$ et $u' = 2$ ce qui donne $\frac{2}{2\sqrt{2x+4}}$

Ainsi sur J on a : $f'(x) = \frac{-2}{(x+5)^2} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Commençons par déterminer $f(1) = \frac{2}{1+5} + \sqrt{2\times 1 + 4} = \frac{2}{6} + \sqrt{6}$ et $f'(1) = \frac{-2}{(1+5)^2} + \frac{1}{\sqrt{2+4}} = \frac{-2}{36} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

$T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = \left(\frac{-1}{18} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)(x-1) + \frac{1}{3} + \sqrt{6} \Leftrightarrow y = \left(\frac{-1}{18} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)x + \frac{1}{18} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3} + \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow y = \left(\frac{-1}{18} + \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}}\right)x + \frac{1}{18} - \frac{3\sqrt{6}}{3\times 6} + \frac{6}{18} + \frac{3\times 6\sqrt{6}}{3\times 6} \Leftrightarrow y = \frac{-1+3\sqrt{6}}{18}x + \frac{7+15\sqrt{6}}{18}$

Exercice 4. Avec u^2 et les tangentes horizontales 7 points

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = (x^2 - 5x + 4)^2$

1. f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Je reconnais $u^n \to n\,u'u^{n-1}$ avec $u = x^2-5x+4$ et $u' = 2x-5$ et donc $f'(x) = 4(2x-5)(x^2-5x+4)^4$.

3. pour que C_f admette une tangente horizontale en un point d'abscisse x, il faut que $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4(2x-5)(x^2-5x+4)^4 = 0 \Leftrightarrow 2x-5 = 0$ ou $x^2-5x+4 = 0$

On reconnait $ax^2+bx+c = 0$ avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 4$ et donc $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 4 = 9 > 0$

Il y aura deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$

Ainsi tangente horizontale en $x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = 1$ ou $x = 4$

Exercice 5. Dérivations de fonction 7 points

Dans cet exercice le domaine de dérivabilité sera noté D'. On s'intéresse aux fonctions :

$f(x) = -\frac{x^7}{14} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^2}{4} + x\sqrt{3}$ on a $D_f = D' = \mathbb{R}$

$= -\frac{1}{14}x^7 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{3}$

$f'(x) = -\frac{1}{14}7x^6 - \frac{1}{3}6x^5 + \frac{1}{4}2x^1 + \sqrt{3}$

$= -\frac{7x^6}{14} - \frac{6x^5}{3} + \frac{2x^1}{4} + \sqrt{3} = -\frac{x^6}{2} - 2x^5 + \frac{x}{2} + \sqrt{3}$

$g(x) = \frac{7}{x^3} - \frac{1}{5x^2}$ on a $D_g = D' = \mathbb{R}$

$= 7\frac{1}{x^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{x^2}$

$g'(x) = 7\frac{-3}{x^4} - \frac{1}{5}\frac{-2}{x^3} = \frac{-21}{x^4} - \frac{-2}{5x^3} = \frac{-21}{x^4} + \frac{2}{5x^3}$

$h(x) = (3x^2-2)^4(2x+5)^3$ on a $D_h = D' = \mathbb{R}$

$i(x) = 9x^2 - \frac{2}{(5x-7)^2}$ on a $D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$

avec $u^n \to nu'u^{n-1}$ on a :

avec $u = 3x^2-2$ et $u' = 6x$ $(3x^2-2)^4 \to 6x4(3x^2-2)^3 = 24x(3x^2-2)^3$

avec $u = 2x+5$ et $u' = 2$ $(2x+5)^3 \to 2\times 3(2x+5)^2 = 6(2x+5)^2$

et avec $u = 5x-7$ et $u' = 5$ $(5x-7)^2 \to 5\times 2(5x-7) = 10(5x-7)$

ainsi avec $uv \to u'v + uv'$

$h'(x) = 24x(3x^2-2)^3(2x+5)^3 + (3x^2-2)^4 6(2x+5)^2$

$= (3x^2-2)^2(2x+5)^3\big(24x(2x+5) + 6(3x^2-2)\big)$

$= (3x^2-2)^2(2x+5)^3(48x^2+120x+18x^2-12)$

$= (3x^2-2)^2(2x+5)^3(64x^2+120x-12)$

et $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$i'(x) = 18x - \frac{0(5x-7)^2 - 2\times 10(5x-7)}{((5x-7)^2)^2}$

$= 18x - \frac{20(5x-7)}{(5x-7)^4} = 18x - \frac{20}{(5x-7)^3}$

Exercice 6. Coût marginal (Marginal Cost) 5 points

1. Le Coût marginal $C_m(q) = C(q+1) - C(q) = (0{,}01(q+1)^2 + 3(q+1) + 3) - (0{,}01q^2 + 3q + 3)$

$= 0{,}01q^2 + 0{,}02q + 0{,}01 + 3q + 3 + 3 - 0{,}01q^2 - 3q - 3 = 0{,}02q + 0{,}01 + 3 = 0{,}02q + 3{,}01$

2. $C'(q) = 0{,}02q + 3$.

3. $C'(100000) = 0{,}02\times 100000 + 3 = 2\,003$ $C_m(100000) = 0{,}02\times 100000 + 3{,}01 = 2\,003{,}01$

l'écart est de 0,01

Exercice 7 : 2 points

Déterminer les réels tel que $\big(f(x)\big)^2 = f(f(x))$ où

f est la fonction affine de dérivée 2 et dont l'image de 0 est 3 et donc : $f(x) = 2x+3$

$\big(f(x)\big)^2 = f\big(f(x)\big) \Leftrightarrow (2x+3)^2 = 2(2x+3)+3 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9 = 4x+6+3$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x+2) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0$ ou $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Exercice 8. La méthode de Newton 5 points

1. Vérifier que le point d'intersection M de T avec l'axe des abscisses a pour abscisse : $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

La tangente T a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

si on pose x_0 l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses on aura $0 = f'(a)(x_0-a) + f(a)$

$\Leftrightarrow -f(a) = f'(a)(x_0-a) \Leftrightarrow -\frac{f(a)}{f'(a)} = x_0 - a$

$\Leftrightarrow a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x_0$

```python
# Dans l'éditeur Python
def f(x):
    return x**3 - 2*x - 5
def f_prime(x):
    '''IN : x : float
    OUT : f'(x)'''
    return 3*x**2-2

def newton(x_0, nb_etapes):
    valeurs = [0]*(nb_etapes + 1)
    valeurs[0] = x_0
    for idValeur in range(1 , nb_etapes+1):
        x = valeurs[idValeur-1]
        valeurs[idValeur] = x-f(x)/f_prime(x)
    return valeurs
```