Correction des exercices de dérivation

Exercice 1

1.

$f(x) = -4x + 3 \qquad a = 3$

<u>Version avec la limite quand x tend vers 3</u>

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{(-4x+3)-(-4\times3+3)}{x-3} = \frac{-4x+3+12-3}{x-3} = \frac{-4x+12}{x-3} = \frac{-4(x-3)}{(x-3)} = -4$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to3} -4 \ = -4$ ainsi $f'(3) = -4$

<u>Version avec la limite de h en 0</u>

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{-4(3+h)+3-(-4\times3+3)}{h} = \frac{-12-4h+3-(-9)}{h} = \frac{-12-4h+3-(-9)}{h} = -\frac{4h}{h} = -4$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(h+3)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0} -4 = -4$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -4$

La version avec h est un poil plus longue

2.

$f(x) = x^2 - 5x + 3 \ \ a = 5$

<u>Version avec la limite quand x tend vers 5</u>

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \frac{(x^2-5x+3)-(5^2-5\times5+3)}{x-5} = \frac{x^2-5x+3-3}{x-5} = \frac{x^2-5x}{x-5} = \frac{x(x-5)}{(x-5)} = x$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to5} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to5} x \ = 5$ ainsi $f'(5) = 5$

<u>Version avec la limite de h en 0</u>

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{(5+h)^2-5(5+h)+3-(5^2-5\times5+3)}{h} = \frac{25+10h+h^2-25-5h+3-3}{h} = \frac{10h+h^2-5h}{h}$

$= \frac{h(5+h)}{h} = 5 + h$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(h+5)-f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 5 + h = 5$ donc f est dérivable en 3 et $f'(5) = 5$

La version avec h est un poil plus longue

3.

$f(x) = x^3 + 1 \qquad a = 1$

<u>Version avec la limite quand x tend vers 1</u>

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(x^3+1)-(1^3+1)}{x-1} = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$ (factorisation connue par cœur ou difficile à faire rapidement)

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to1} x^2 + x + 1 \ = 3$ ainsi $f'(1) = 3$

<u>Version avec la limite de h en 0</u>

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3+1-(1^3+1)}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3+1-2}{h} = \frac{h(3+3h+h^2)}{h} = 3 + 3h + h^2$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(h+1)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 3 + 3h + h^2 = 3$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$

Plus facile à faire surtout si on connait la formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4.

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad a = -1$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{-1}}{x+1} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}{x+1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{x+1} = \frac{1+x}{x} \div (x+1) = \frac{1+x}{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$

Ainsi :

$\lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x} = -1$ ainsi $f'(-1) = -1$

5.

$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad a = 3$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-3}}{x-3} = \frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}}{x-3} = \frac{\frac{2}{2(1-x)}+\frac{(1-x)}{2(1-x)}}{x-3} = \frac{\frac{3-x}{2(1-x)}}{x-3} = \frac{3-x}{2(1-x)}\frac{1}{x-3} = \frac{-(x-3)}{2(1-x)(x-3)} = \frac{-1}{2(1-x)}$

Ainsi :

$\lim_{x\to3} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to3} \frac{-1}{2(1-x)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ ainsi $f'(3) = \frac{1}{4}$

Exercice 2

$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{(1+h)^2}-\frac{1}{1^2}}{h} = \frac{\frac{1}{(1+h)^2}-\frac{(1+h)^2}{(1+h)^2}}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)^2}{(1+h)^2}}{h} = \frac{1-(1+h)^2}{(1+h)^2}\frac{1}{h} = \frac{[1-(1+h)][1+(1+h)]}{h(1+h)^2}$

$= \frac{[-h][2+h]}{h(1+h)^2} = \frac{-[2+h]}{(1+h)^2} = \frac{-2-h}{(1+h)^2}$

$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ si on pose $h = x-1$ on aura $x = h+1$

$\lim_{h\to0} \frac{f(h+1)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = \frac{-2}{1} = -2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2$

Exercice 3

1.

a.

$f(x)=\sqrt{x}+1 \qquad a=1$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{1}+1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}^2-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}\ =\frac{1}{\sqrt{1}+1}$ ainsi $f'(1)=\frac{1}{2}$

b.

$f(x)=\frac{1}{3x} \qquad a=3$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\times3}}{x-3}=\frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}}{x-3}=\frac{\frac{1\times3}{3x3}-\frac{1x}{9x}}{x-3}=\frac{\frac{3-1x}{9x}}{x-3}=\frac{-(x-3)}{9x}\times\frac{1}{x-3}=\frac{-1}{9x}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to3}\frac{-1}{9x}\ =-\frac{1}{27}$ ainsi $f'(3)=-\frac{1}{27}$

2.

a.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Soit $x\neq0$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}}{h}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}\times\frac{1}{h}$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x+h}^2}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$=\frac{x-x-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-1}{\sqrt{x+0}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})}=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(2\sqrt{x})}=\frac{-\sqrt{x}}{x2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

Ainsi $f'(x)=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

b.

$f(x)=\frac{x}{3x+1}$

Soit $x\neq-\frac{1}{3}$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{x+h}{3(x+h)+1}-\frac{x}{3x+1}}{h}=\frac{\frac{(x+h)(3x+1)}{(3x+3h+1)(3x+1)}-\frac{x(3x+3h+1)}{(3x+1)(3x+3h+1)}}{h}$

$=\frac{3x^2+x+3xh+h-(3x^2+3xh+x)}{(3x+3h+1)(3x+1)}\times\frac{1}{h}=\frac{3x^2+x+3xh+h-3x^2-3xh-x}{h(3x+3h+1)(3x+1)}$

$=\frac{h}{h(3x+3h+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+3h+1)(3x+1)}$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{(3x+3h+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+1)^2}$

Ainsi $f'(x)=\frac{1}{(3x+1)^2}$

Exercice 4

1) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$p = 2$ et donc la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = \frac{1}{2}x + 2$

2) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{1-0} = 0$

$p = 2$ et donc la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = 0x + 2$

3) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$

p et n'est pas lisible donc $y = \frac{3}{2}x + p$, utilisons le point de coordonné (1 ;2)

$2 = \frac{3}{2} \times 1 + p \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} = p \Leftrightarrow \frac{1}{2} = p$

Ainsi la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

4) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1$

$p = 2$ ainsi la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = -1x + 2$

Exercice 5

$f(0) = 1$	$f(-2) = -1$	$f(1) = 1{,}5$
$f'(0) = -\frac{1}{2}$	$f'(-2) = 0$	$f'(1) = 2$

Exercice 6 (à étudier lors du deuxième chapitre sur les dérivées : « fonctions dérivées »)

1.

$$f(x) = -x^2 + 3x - 1$$

f étant un polynôme, elle sera définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.

$f(x) = \sqrt{x-3}$

f est la racine d'un polynôme, ce dernier est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par contre la racine étant définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ on doit résoudre :

* $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ qui nous permet de dire que f est définie sur $[3; +\infty[$

* $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ qui nous permet de dire que f est dérivable sur $]3; +\infty[$

3.

$$f(x) = \frac{x-5}{1-x}$$

$\frac{u}{v}$ est définie et dérivable tant que u et v le sont et que $v \neq 0$

Comme le numérateur et le dénominateur sont des fonctions affines elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $1 - x$ s'annule en 1 et donc f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

On utilise $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$ avec $u = x - 5$, $u' = 1$, $v = 1 - x$, $v' = -1$ et donc $f'(x) = \frac{1(1-x)-(x-5)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x-5}{(1-x)^2} = \frac{-4}{(1-x)^2}$

4.

$$f(x) = |x+2| = \begin{cases} x + 2 \; si \; x > -2 \\ -(x+2) si \; x < -2 \\ 0 \; si \; x = -2 \end{cases}$$

Les fonction valeur absolue et $x + 2$ sont toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, donc f le sera aussi.

La valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $x + 2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'antécédent de 0 par cette fonction est -2 donc f sera dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1\ si\ x > -2 \\ -1 si\ x < -2 \\ \end{cases}$$

Exercice 8

1) $f'(-5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $f'(-4) = 0$

$f'(-2) = -6$ $\qquad$ $f'(4) = \frac{-3}{4}$

2) en $a = 4$ $\quad T_4: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\qquad \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}(x-4) + \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3 - \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}$

en $a = -2$ $\quad T_{-2}: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\qquad \Leftrightarrow y = -6\big(x - (-2)\big) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -6x - 12 + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = -6x - \frac{23}{2}$

Exercice 10

1)

$f(-2) = 1$ $\qquad$ $f'(-5) = 0$ $\qquad$ $f'(2) = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $f'(6{,}5) = \frac{2{,}5}{2} = \frac{5}{4}$

2)

en $a = 6{,}5$ $\quad T_{6,5}: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\qquad \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}(x - 6{,}5) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{65}{8} + \frac{16}{8}$

$\Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{49}{8}$