DÉRIVATION – Chapitre 1/3

Partie 1 : Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

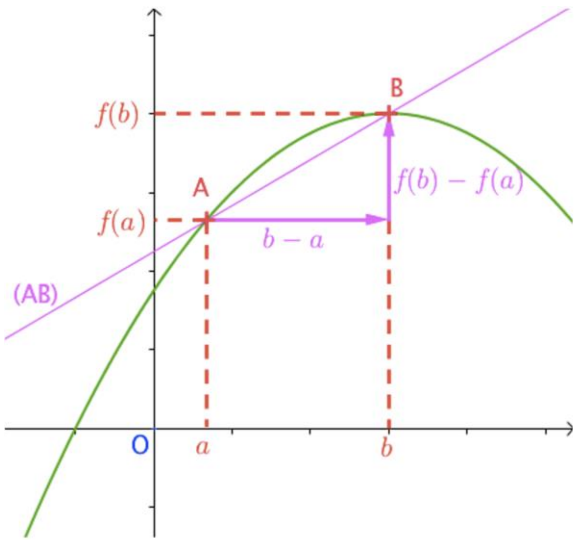
2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

Définition : On dit que $f(x)$ a pour **limite** L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L.

Partie 2 : Nombre dérivé

1) Pente d'une droite (rappel)

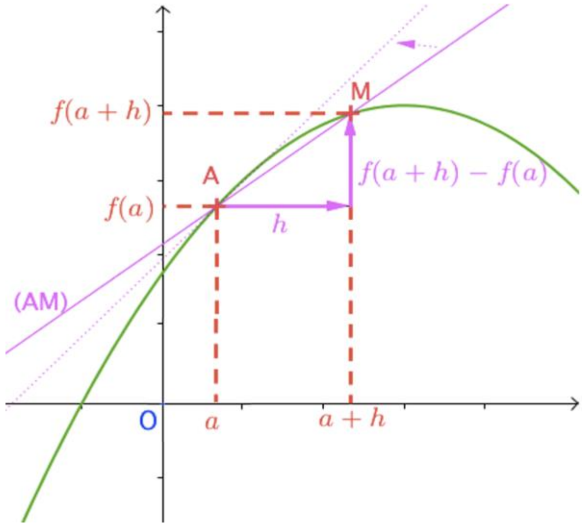
Formule du taux d'accroissement :
Sur le graphique suivant, la pente de la droite (AB) sécante à la courbe est égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



2) Fonction dérivable

Sur le graphique ci-contre, la pente de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.

Lorsque M se rapproche de A, h tend vers 0 ($h \to 0$).
La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L, tel que :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :
Dans la définition, si L n'est pas égal à un nombre, alors f n'est pas dérivable en a.
Par exemple, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}$ n'est pas un nombre. En effet, $\frac{1}{h}$ se rapproche de $+\infty$ lorsque h se rapproche de 0.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

Correction

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

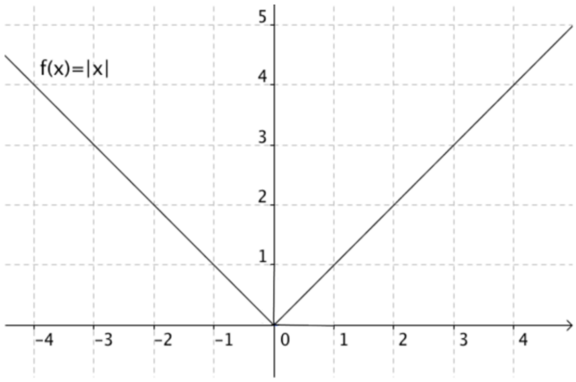
....

....

3) Cas de la fonction valeur absolue

Définition : La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Exemples :
- $f(-5) = |-5| = 5$
- $f(4) = |4| = 4$



Propriété :
Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$
Si $x \leq 0$, alors $f(x) = |x| = -x$

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ sur }]-\infty\,;0] \\ x \text{ sur } [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;\,+\infty[$, la fonction valeur absolue est une fonction affine.

Méthode : Démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue
Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Correction
Soit la fonction f définie par $f(x) = |x|$.
On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

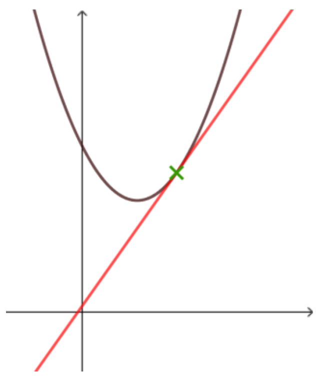
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, & si\ h > 0. \\ \frac{-h}{h} = -1, & si\ h < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h. La limite ne peut pas être égal à la fois à 1 et à -1.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.
En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Remarque : Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

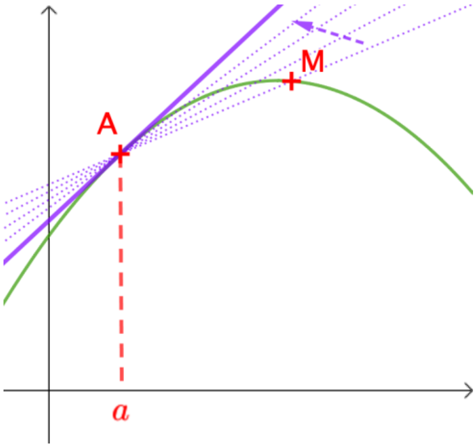
Partie 3 : Tangente à une courbe

1) Pente de la tangente



Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.

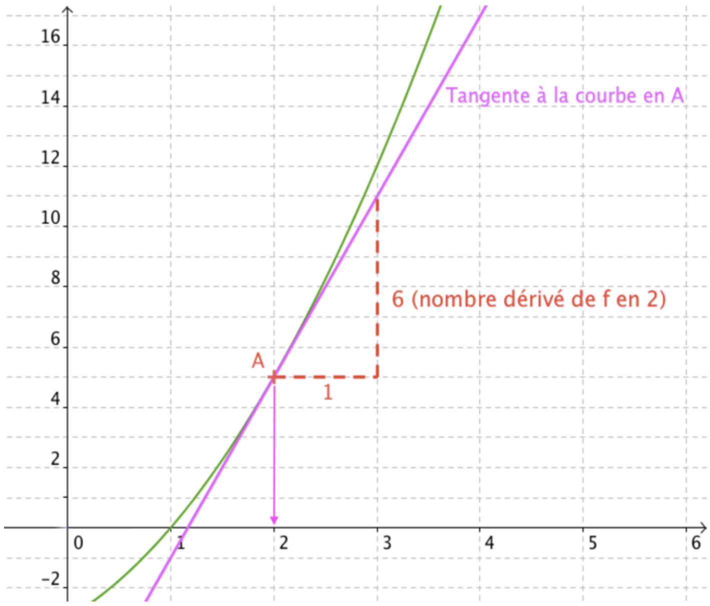
Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.



Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite sécante (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.
Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$ défini dans le paragraphe précédent.

Exemple :

Sur le graphique ci-contre, on lit que la pente de la tangente en 2 est égale à 6.
On a donc : $f'(2) = 6$



Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé

a) On a représenté les fonctions f, g et h et trois tangentes dans un repère.
Lire graphiquement $f'(3)$, $g'(2)$ et $h'(6)$.

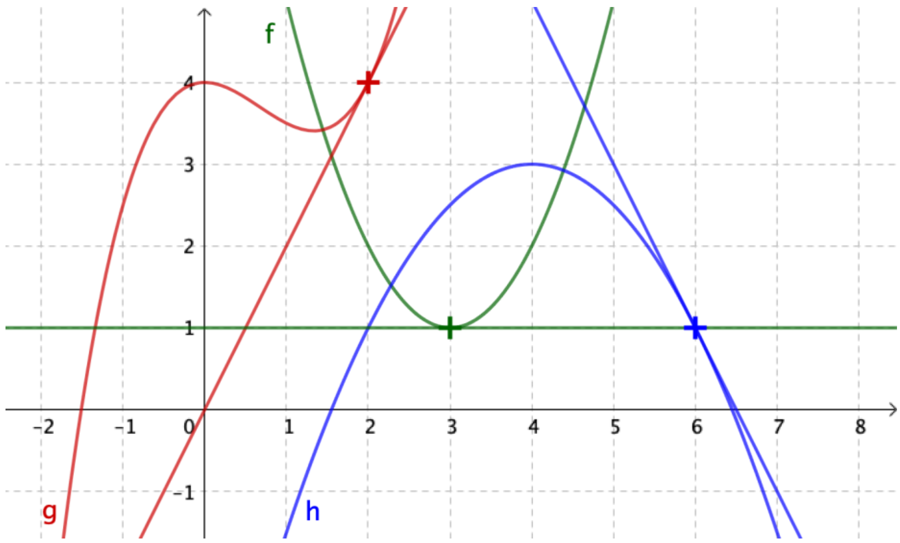
……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………



b) Tracer la tangente à la courbe de la fonction g en 1 tel que $g'(1) = -\frac{1}{2}$.

2) Équation de la tangente

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration au programme :

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :
$y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point A$\left(a\,;f(a)\right)$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Méthode : Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse $x = 1$.

Correction
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :

....

● On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

....

....

....

....

....

....

....

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ = ...
Le nombre dérivé de f en 1 vaut ....et on note : $f'(1)$ = ...

● On calcule $f(1)$: $f(1) =$...........................
Une équation de la tangente en 1 est donc de la forme : ....

....
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1 est
....