DÉRIVATION – Chapitre 2/3

Partie 1 : Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemples :

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction inverse (correction de l'exercice 3 question 2 du DM facultatif

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction carré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en a (nombre réel quelconque).
Pour $h \neq 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$
Or : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a + h = 2a$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Définitions :
On dit que la fonction f est **dérivable** sur un intervalle I, si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

2) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) =$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) =$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) =$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) =$

Méthode : Dériver les fonctions usuelles

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$f(x) = 100$; $g(x) = -5x$; $h(x) = x^4$; $k(x) = \frac{1}{x^5}$; $m(x) = \sqrt{x}$

3) Cas de la fonction racine carrée

On peut lire dans le tableau plus haut que la fonction racine carrée est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ mais dérivable seulement sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

Pour h…….. : $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ = ……………………………………………………………………………………………

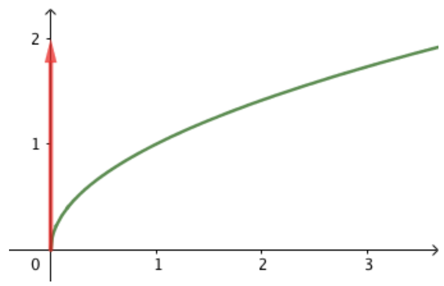
………

………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………



Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.

Partie 2 : Opérations sur les fonctions dérivées

1) Opérations sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = ku(x), \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Démonstration au programme pour le produit :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On veut démontrer que pour tout a de I, on a :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

……

……

……

……

……

……

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on a :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ = ………………………………………………………………………………………

……

Car u et v sont dérivables sur I.

……

……

……

……

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f :

a) $f(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^2+5x}$

e) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2-2x-1}$

2) Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Méthode : Dériver une fonction composée $f(ax+b)$

Calculer les fonctions dérivées des fonctions g et h définies par :
$g(x)=(7x+1)^3 \qquad h(x)=\sqrt{5x-4}$

Partie 4 : Étude des variations d'une fonction

1) Variations et signe de la dérivée

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Remarques : - Si $f'(x)=0$, alors f est **constante** sur I.
- Si $f'(x)>0$, alors f est **strictement** croissante sur I.

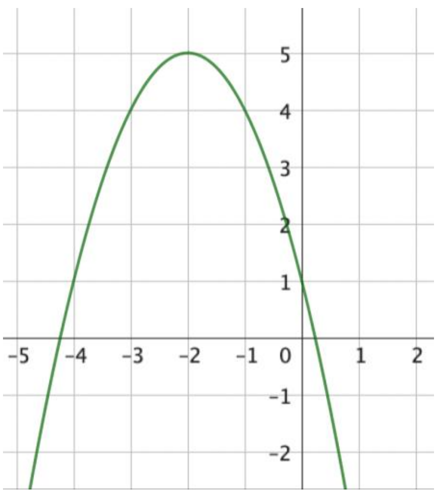
Méthode : Comprendre le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, tel que $f(2)=-1$.
On donne le signe de la dérivée, compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, tel que $f(4)=3$.
On donne les variations de la fonction f, compléter le tableau avec le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	



c) On donne la représentation graphique de la fonction f, compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$					

2) Étude des variations d'une fonction du second degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

2) Étude des variations d'une fonction du 3e degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du 3e degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

3) Étude des variations d'une fonction rationnelle

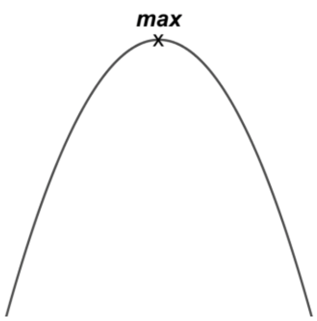
Méthode : Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f ' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Partie 5 : Extremum d'une fonction

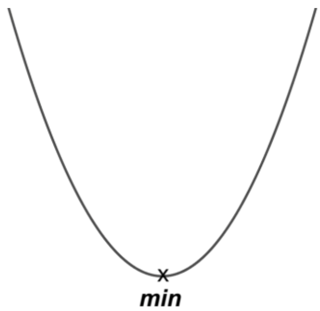
La fonction admet un **maximum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x			
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$



La fonction admet un **minimum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x			
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$



Théorème : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' s'annule et change de signe en un réel c alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode : Déterminer un extremum d'une fonction
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) En déduire que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur où il est atteint.
e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point de l'extremum.

Méthode : Tracer une courbe à l'aide du tableau de variations

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;7]$
Tracer dans un repère une représentation graphique de la fonction f.

x	-5		-1		4		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

Partie 6 : Applications

1) Étude du signe d'une fonction

Méthode : Étudier le signe d'une fonction à l'aide de ses variations

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 5$.
a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante.
b) Vérifier que 1 est une racine de f.
c) Dresser le tableau de variations de f et en déduire le signe de f en fonction de x.

2) Étudier la position de deux courbes

Méthode : Étudier la position relative de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

3) Résoudre un problème d'optimisation

Méthode : Résoudre un problème d'optimisation
Une entreprise fabrique des composants pour ordinateur. Pour une quantité x, exprimée en milliers de composants, le coût total en milliers d'euros est :
$C(x) = 0{,}2x^2 + 24x + 20$ avec $x \in [0; 30]$.
La recette est alors égale à : $R(x) = 30x$.
Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.
Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants correspondants à produire.