FONCTION EXPONENTIELLE

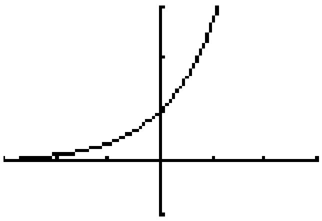
Partie 1 : Introduction de la fonction exponentielle

1) Définition

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra plus bas que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.
Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

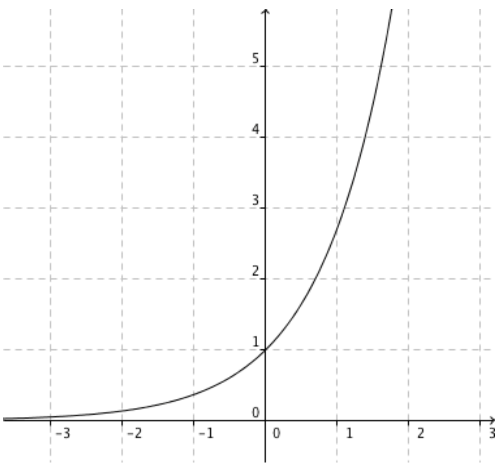
2) Variations et courbe

Par définition de la fonction exp, on a :

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x)$

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.



3) Propriétés

Théorème : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement. On l'appelle relation fonctionnelle.

Corollaires :

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp(x)\exp(-x) = 1$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

b) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big)$

$= \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\ \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Partie 2 : Le nombre *e*

1) Le nombre e

Notation : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
On a ainsi $\exp(1) = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

Notation nouvelle :
$\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

Notation : On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

Dans la suite, on utiliser la notation e^x pour désigner la fonction exponentielle.

2) Propriétés

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\qquad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $\qquad D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Correction

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5\times(-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$$

$$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$$

3) Équations et inéquations contenant des exponentielles

Propriétés :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation contenant des exponentielles

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Correction

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$e^{x^2-3} = e^{-2x}$
$x^2 - 3 = -2x$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
Donc $x = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$ ou $x = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$
$S = \{-3\ ;\ 1\}$.

b) $e^{4x-1} \geq 1$
$e^{4x-1} \geq e^0$
$4x - 1 \geq 0$
$x \geq \frac{1}{4}$
$S = \left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

Partie 3 : Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$

Correction

a) $f'(x) = 4 - 3e^x$

b) $g(x) = (x-1)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x - 1 \rightarrow\ u'(x) = 1$
$v(x) = e^x\ \rightarrow\ v'(x) = e^x$

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$= 1 \times e^x + (x-1)e^x$
$= e^x + xe^x - e^x$
$= xe^x$

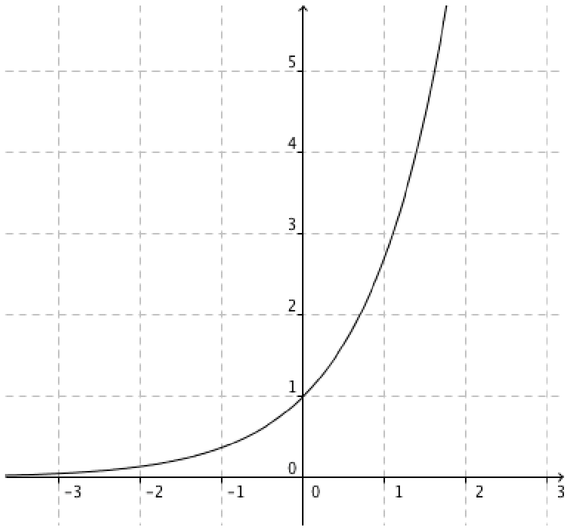
c) $h(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$
Avec : $u(x) = e^x\ \rightarrow\ u'(x) = e^x$
$v(x) = x\ \rightarrow\ v'(x) = 1$

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$
$$= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$$
$$= \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$
$$= \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

2) Variations et courbe de la fonction exponentielle

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	$+$	
e^x	0 ↗	$+\infty$



Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Correction

a) $f(x) = (x+1)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x + 1 \rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$= 1 \times e^x + (x+1)e^x$$
$$= e^x + xe^x + e^x$$
$$= 2e^x + xe^x$$
$$= e^x(2 + x)$$

← Factoriser $f'(x)$ permet d'étudier son signe à la question b.

b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.
On commence par résoudre l'équation $x + 2 = 0$.
Soit : $x = -2$.

La fonction $x \mapsto x + 2$ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 1 est positif.
Donc la fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = -2$) puis positive (après $x = -2$).

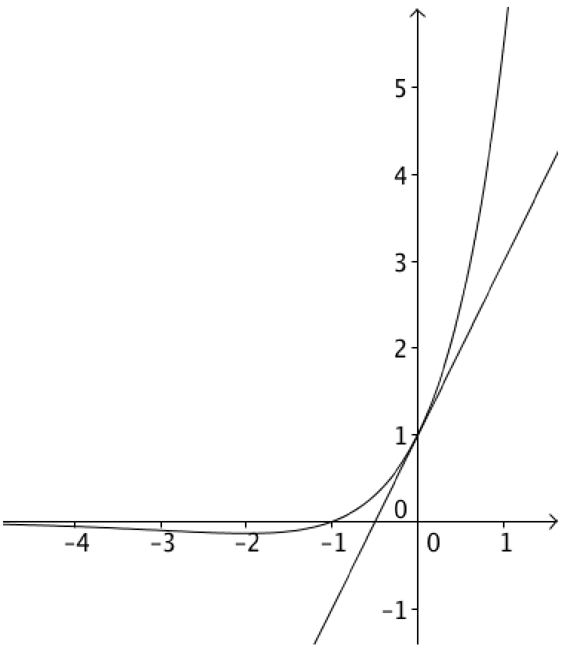
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

$$f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}.$$

c) $f(0) = (0+1)e^0 = 1$
$f'(0) = (0+2)e^0 = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit :
$$y = 2x + 1$$

d)



Partie 4 : Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$

1) <u>Dérivabilité</u>

Propriété :
La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = ke^{kt}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \longmapsto g(at + b)$ est
$t \longmapsto ag'(at + b)$.
En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Méthode : Dériver une fonction du type $t \longmapsto e^{kt}$
Dériver les fonctions suivantes :

$a)\ f(t) = 5e^{-3t}$ $\qquad b)\ g(t) = te^{-t}$ $\qquad c)\ h(t) = \dfrac{4}{e^t}$

Correction
$a)\ f'(t) = 5 \times (-3)e^{-3t} = -15e^{-3t}$

b) $g(t) = te^{-t} = u(t)v(t)$
Avec : $u(t) = t \ \rightarrow\ u'(t) = 1$
$v(t) = e^{-t} \ \rightarrow\ v'(t) = -e^{-t}$

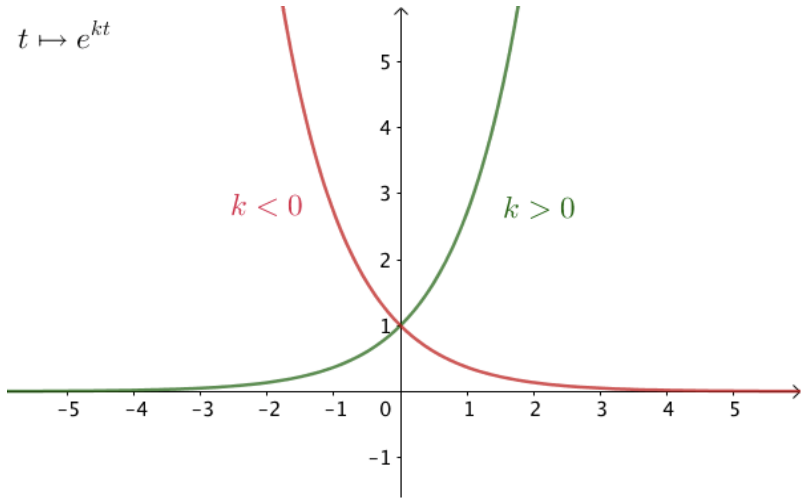
$$\begin{aligned} g'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 1 \times e^{-t} + t(-e^{-t}) \\ &= e^{-t} - te^{-t} \end{aligned}$$

$c)\ h(t) = \dfrac{4}{e^t} = 4e^{-t}$
$(t) = 4 \times (-1)e^{-t} = -4e^{-t}$

2) Variations et courbe

Propriété :
Si $k > 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
Si $k < 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

Démonstration :
On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$
Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.
Donc le signe de la dérivée $t \longmapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k.
Si $k > 0$ alors la dérivée est strictement positive est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
Si $k < 0$ alors la dérivée est strictement négative est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.



Méthode : Étudier une fonction $t \longmapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Correction

1) $f'(t) = A \times 0{,}14e^{0{,}14t} = 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14f(t)$.
La fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0{,}14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0{,}14\times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0{,}14t}$.

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

4) a) $f(3) = 50\,000\ e^{0{,}14\times 3} = 50\,000\ e^{0{,}42} \approx 76\,000$
$f(5{,}5) = 50\,000\ e^{0{,}14\times 5{,}5} = 50\,000\ e^{0{,}77} \approx 108\,000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.

Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

Partie 5 : Exponentielle et suite géométrique

Propriété : Pour tout réel a, on a : $e^{na} = (e^a)^n$
La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) a) Déterminer une expression en fonction de n de la suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

b) Donner les variations de cette suite.

Correction

On rappelle qu'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0 q^n$.

1) a) $u_n = e^{4n} = 1(e^4)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2(e^{-3})^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}} = (-1)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme -1.

d) $u_n = e^{2n-1} = e^{2n}e^{-1} = e^{-1}(e^2)^n = \frac{1}{e}(e^2)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) a) (u_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :

$u_n = 3\left(\frac{1}{e}\right)^n = 3(e^{-1})^n = 3e^{-n}$.

b) La raison de la suite est telle que $0 < \frac{1}{e} < 1$, donc la suite est décroissante.