FONCTION EXPONENTIELLE

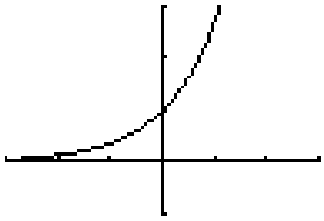
Partie 1 : Introduction de la fonction exponentielle

1) Définition

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra plus bas que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.
Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

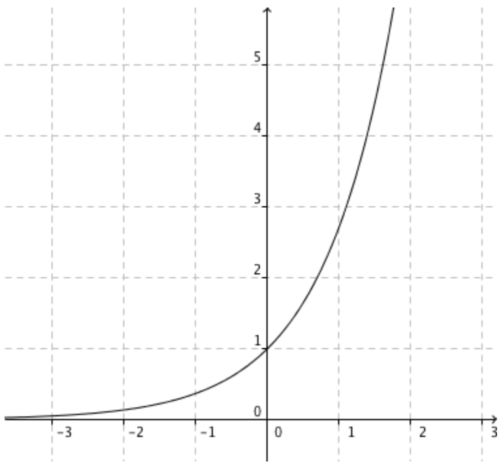
2) Variations et courbe

Par définition de la fonction exp, on a :

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x)$

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.



3) Propriétés

Théorème : $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement. On l'appelle relation fonctionnelle.

Corollaires :

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp(x)\exp(-x) = 1$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

b) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big)$

$= \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\ \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Partie 2 : Le nombre *e*

1) Le nombre *e*

Notation : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
On a ainsi $\exp(1) = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

Notation nouvelle :
$\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

Notation : On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

Dans la suite, on utiliser la notation e^x pour désigner la fonction exponentielle.

2) Propriétés

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés :
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\qquad$ $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $\qquad$ $D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

3) Équations et inéquations contenant des exponentielles

Propriétés :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation contenant des exponentielles
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Partie 3 : Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

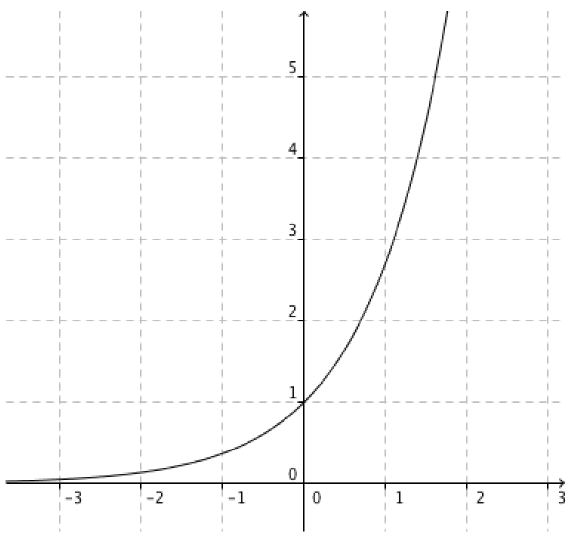
Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ $\qquad$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ $\qquad$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

2) Variations et courbe de la fonction exponentielle

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0 ↗	$+\infty$



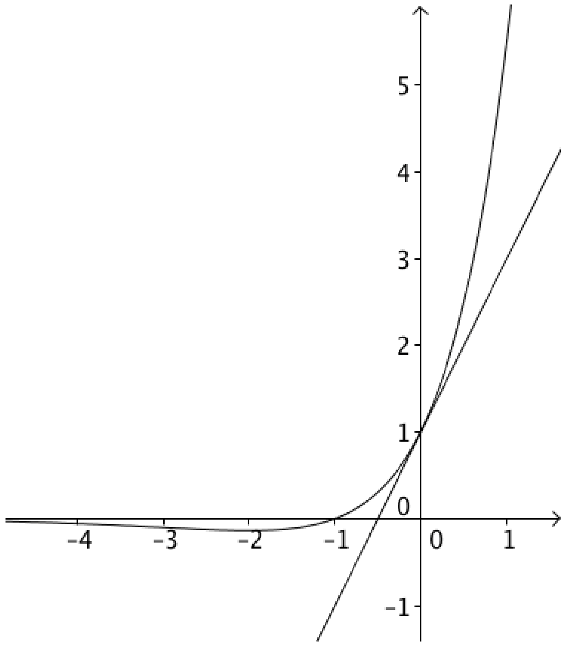
Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



Partie 4 : Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$

1) Dérivabilité

Propriété :

La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = ke^{kt}$.

Démonstration :

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \longmapsto g(at + b)$ est $t \longmapsto ag'(at + b)$.

En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Méthode : Dériver une fonction du type $t \longmapsto e^{kt}$

Dériver les fonctions suivantes :

$$a)\ f(t) = 5e^{-3t} \qquad b)\ g(t) = te^{-t} \qquad c)\ h(t) = \frac{4}{e^t}$$

2) Variations et courbe

Propriété :

Si $k > 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

Démonstration :

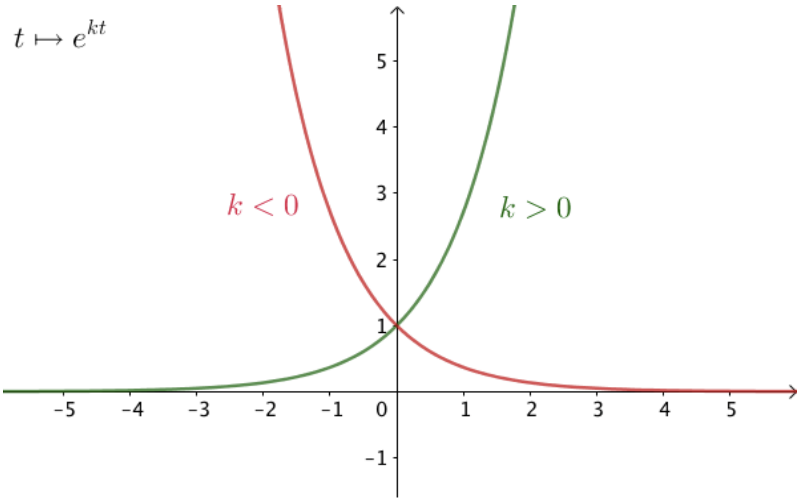
On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$

Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.

Donc le signe de la dérivée $t \longmapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k.

Si $k > 0$ alors la dérivée est strictement positive est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$ alors la dérivée est strictement négative est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.



Méthode : Étudier une fonction $t \longmapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10]
et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

Partie 5 : Exponentielle et suite géométrique

Propriété : Pour tout réel a, on a : $e^{na} = (e^a)^n$
La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) a) Déterminer une expression en fonction de n de la suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.
   b) Donner les variations de cette suite.