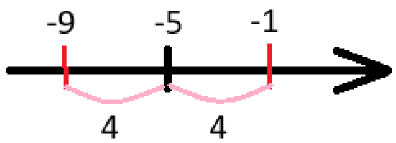
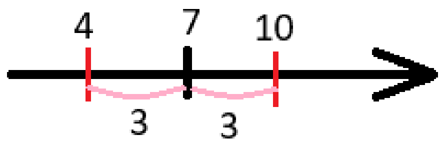
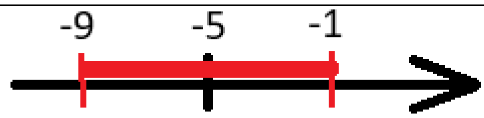
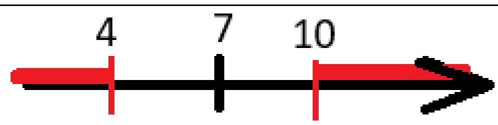
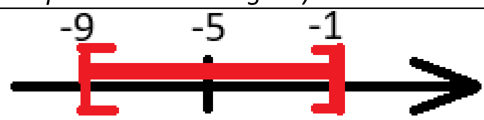
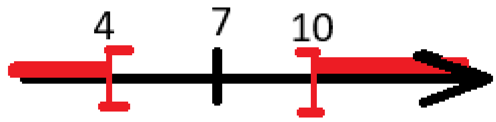
Fiche méthode : inéquations avec valeurs absolues

Compétence : **Savoir résoudre les inéquations du genre $\lvert x+5\rvert \leq 4$ et $\lvert x-7\rvert > 3$**

Méthode / explication	Exemple 1	Exemple 2
	$\lvert x+5\rvert \leq 4$	$\lvert x-7\rvert > 3$
On se ramène à une forme où on a une soustraction dans la valeur absolue	$\Leftrightarrow \lvert x-(-5)\rvert \leq 4$ $\Leftrightarrow d(x;-5) \leq 4$ *La distance entre -5 et x est comparée avec 4*	Rien à faire *La distance entre 7 et x est comparée avec 3*
Sur l'axe je vais placer la valeur de référence et deux points de part et d'autre de celle-ci, situé à la distance fournie à droite dans mon inégalité.		
Je colorie les points situés à une distance adéquate	 *La distance entre -5 et x étant plus petite que 4, on va colorier la zone entre les deux valeurs butoirs.* *(Les points moins éloignés)*	 *La distance entre 7 et x étant plus grande que 3, on va colorier la zone à l'extérieure des deux valeurs butoirs* *(les points plus éloignés)*
Je place mes crochets. Ils sont ouverts si l'inégalité est stricte, fermés si l'inégalité est large.		
J'interprète ce que je viens de trouver.	$S=[-9;-1]$	$S=]-\infty;4[\cup]10;+\infty[$

Pour résumer :

- Les inéquations de la forme $\lvert x-a\rvert \leq e$, $\lvert x-a\rvert < e$ c'est un intervalle centré autour de « a » et de « rayon » e.
- Les inéquations de la forme $\lvert x-a\rvert \geq e$, $\lvert x-a\rvert > e$ c'est tous les réels sauf ceux qui sont dans l'intervalle qu'on aurait avec une inéquation comme celle du point précédent. Autre formulation : une union de deux intervalles allant de $-\infty$ ou $+\infty$ vers des valeurs situées à une distance « e » de « a » un intervalle centré autour de « a » et de « rayon » e.

Dans les deux cas les bornes sont fermées si l'inégalité est large, ouverte si l'inégalité est stricte.

Cas particuliers

Des fois les signes sont inadaptés et nous empêche de reconnaitre la distance entre x et une valeur.
Dans la valeur absolue on peut remplacer l'intérieur par son opposé sans que ça change les solutions :

$$\lvert 9+x\rvert > 3 \Leftrightarrow \lvert -9-x\rvert > 3 \Leftrightarrow d(-9;x) > 3$$

On peut aussi permuter les éléments à l'intérieur sans changer les solutions :

$$\lvert -x+7\rvert \leq 2 \Leftrightarrow \lvert +7-x\rvert \leq 2 \Leftrightarrow d(7;x) \leq 2$$

Compétence : Résolution d'une équation / inéquations contenant plusieurs valeurs absolues

<table>
<tr><th>$|2x+6|-|7-3x|=4$</th><th>Méthode</th></tr>
<tr><td>$2x+6\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x\geq -3$

$7-3\mathrm{x} \Leftrightarrow -3x\geq -7 \Leftrightarrow x\leq \frac{-3}{-7} \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{7}$</td><td>On commence par déterminer sous quelles conditions les intérieurs des différentes valeurs absolues sont positives. Dans ces cas les valeurs absolues seront remplacées par leur intérieur, dans le cas contraire par l'opposé de leur intérieur</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>Intervalles</td><td>$]-\infty;-3]$</td><td>$\left[-3;\frac{3}{7}\right]$</td><td>$[\frac{3}{7};+\infty[$</td></tr>
<tr><td>$2x+6$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$7-3\mathrm{x}$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$|2x+6|$</td><td>$-2x-6$</td><td>$2x+6$</td><td>$2x+6$</td></tr>
<tr><td>$|7-3\mathrm{x}|$</td><td>$7-3\mathrm{x}$</td><td>$7-3\mathrm{x}$</td><td>$-7+3\mathrm{x}$</td></tr>
</table></td><td>On fait un tableau récapitulant les différentes zones possibles (délimitées par $-\infty$, $+\infty$, et toutes les valeurs butoirs trouvées à l'étape précédente)
Les deux lignes donnant les signes des intérieurs des valeurs absolues sont facultatives mais elles sont intéressantes pour bien comprendre pourquoi les valeurs absolues sont remplacées par leurs intérieurs ou leurs opposés.</td></tr>
<tr><td>Sur $]-\infty;-3]$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|=4$
$\Leftrightarrow (-2x-6)-(7-3\mathrm{x})=4$
$\Leftrightarrow -2x-6-7+3\mathrm{x}=4$
$\Leftrightarrow x-13=4 \Leftrightarrow x=17$
$S_1=\{17\}\cap]-\infty;-3]=\emptyset$</td><td>Pour chaque zone du tableau, on exprime l'équation simplifiée (débarrassée de ses valeurs absolues).
Une fois que c'est fait on les résout, et on regarde des solutions trouvées celles qui sont dans l'intervalle sur lequel on travaille.</td></tr>
<tr><td>Sur $\left[-3;\frac{3}{7}\right]$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|=4$
$\Leftrightarrow (2x+6)-(7-3\mathrm{x})=4$
$\Leftrightarrow 2x+6-7+3\mathrm{x}=4$
$\Leftrightarrow 5x-1=4 \Leftrightarrow 5x=4+1$
$\Leftrightarrow x=1$ $\qquad S_2=\{1\}\cap\left[-3;\frac{3}{7}\right]=\{1\}$</td><td>Idem

Remarque : il vaut mieux remplacer les valeurs absolues par le bon contenu protégé par des parenthèses pour éviter des erreurs de signe.</td></tr>
<tr><td>Sur $[\frac{3}{7};+\infty[$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|=4$
$\Leftrightarrow (2x+6)-(-7+3\mathrm{x})=4$
$\Leftrightarrow 2x+6+7-3\mathrm{x}=4 \Leftrightarrow -x+13=4$
$\Leftrightarrow -x=4-13 \Leftrightarrow x=9$
$S_3=\{9\}\cap[\frac{3}{7};+\infty[=\{9\}$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>$S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{1;9\}$</td><td>On concatène les ensembles de solutions</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>$|2x+6|-|7-3x|>4$</th><th>Méthode</th></tr>
<tr><td></td><td>Les deux premières étapes sont identiques à celles faites pour la résolution de l'équation (précédente)</td></tr>
<tr><td>Sur $]-\infty;-3]$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|>4$
$\Leftrightarrow (-2x-6)-(7-3\mathrm{x})>4$
$\Leftrightarrow -2x-6-7+3\mathrm{x}>4$
$\Leftrightarrow x-13=4 \Leftrightarrow x>17$
$S_1=]17;+\infty[\cap]-\infty;-3]=\emptyset$</td><td>Pour chaque zone du tableau, on exprime l'équation simplifiée (débarrassée de ses valeurs absolues).
Une fois que c'est fait on les résout, et on regarde des solutions trouvées celles qui sont dans l'intervalle sur lequel on travaille.</td></tr>
<tr><td>Sur $\left[-3;\frac{3}{7}\right]$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|>4$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>1$
$S_2=]1;+\infty[\cap\left[-3;\frac{3}{7}\right]=]1;\frac{3}{7}]$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>Sur $[\frac{3}{7};+\infty[$, $|2x+6|-|7-3\mathrm{x}|>4$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -x>4-13 \Leftrightarrow x<9$
$S_3=]-\infty;9[\cap[\frac{3}{7};+\infty[=[\frac{3}{7};9[$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>$S=S_1\cup S_2\cup S_3=]1;\frac{3}{7}]\cup[\frac{3}{7};9[=]1;9[$</td><td>On concatène les ensembles de solutions</td></tr>
</table>