Nom & Prénom : ………………………………………………………………………………………………

Contrôle : probabilités conditionnelles

Exercice 1

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie. On choisit un élève au hasard.

A côté de chaque langue ou activité on trouve une lettre entre parenthèse, elle correspond à l'évènement associé, par exemple D = « on sélectionne un élève faisant de l'allemand ».

1) Compléter le.

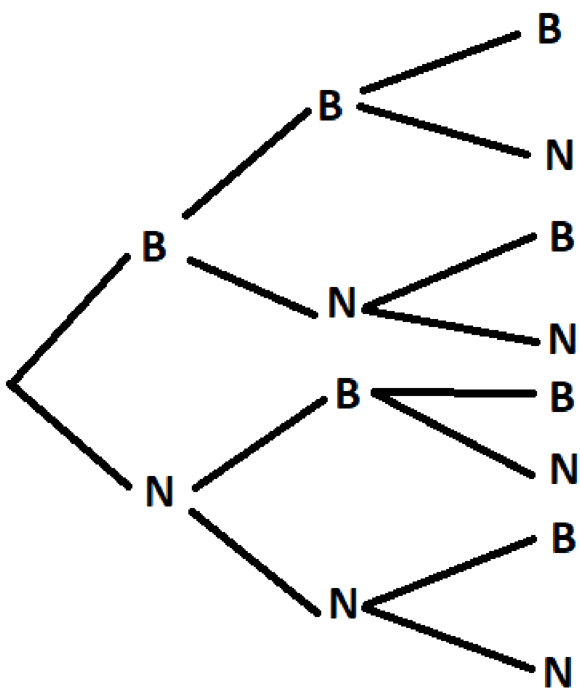
	Tennis (T)	Equitation (E)	Voile (V)	Total
Anglais (A)	45	18	27	
Allemand (D)		9	18	
Total				150

2) Déterminer en lisant directement le tableau $P(E)$, $P(E \cap A)$,$P_A(E)$ et $P_E(A)$.
3) Retrouver le dernier résultat en utilisant ceux qui précèdent et une formule du cours.
4) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
5) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Exercice 2

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. En fin de tirage on obtient donc une éventualité, par exemple qui correspond à la situation la première boule tirée est blanche, la seconde blanche et la troisième noire qui sera noté sous la forme du triplet : $(B; B; N)$.

1) Faire un arbre
2) Déterminer $P((B; B; N))$
3) Déterminer les triplets correspondant à l'évènement « avoir au moins deux boules blanches ».
4) Calculer la probabilité de cet évènement.
5) Déterminer aussi efficacement (ce qui ne veut pas dire de manière bâclée) la probabilité d'avoir au moins une boule blanche.
6) On effectue un tirage. Sachant qu'il contient au moins une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée est de cette couleur.



Exercice 3

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

On posera respectivement B et C les évènements :

$B = \{l'étudiant\ a\ Bien\ répondu\}$ et $C = \{l'étudiant\ Connait\ la\ réponse\}$

Exercice 4

Une propriété du cours dit que :

(A et B indépendants) ⇔ (A et $\bar{B}$ indépendants) ⇔ ($\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants) ⇔ ($\bar{A}$ et B indépendants)

Nous allons prouver une partie de cette propriété (<u>du coup on n'a pas le droit de l'utiliser dans la preuve</u>)

Soit A et B deux évènement indépendants.

1) En utilisant la formule de probabilité totale astucieusement donner une expression de $P(\bar{A} \cap B)$.
2) En utilisant l'indépendance donnée par l'énoncé puis une factorisation déduire du 1) l'indépendance de $\bar{A}$ et B.
3) En admettant celle-ci, et en vous inspirant du raisonnement tenu lors des questions précédentes prouver que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Correction

Exercice 1

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

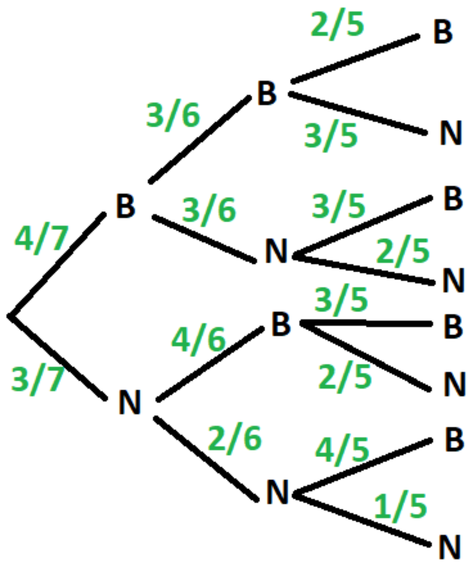
1) Compléter le.

	Tennis (T)	Equitation (E)	Voile (V)	Total
Anglais (A)	45	18	27	90
Allemand (D)	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

2) $P(E) = \frac{27}{150} = \frac{9}{50}$, $P(E \cap A) = \frac{18}{150} = \frac{3}{25}$, $P_A(E) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ et $P_E(A) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.
3) $P_E(A) = \frac{P(E\cap A)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{9}{50}} = \frac{3}{25} \times \frac{50}{9} = \frac{2}{3}$Retrouver le dernier résultat en utilisant ceux qui précèdent et une formule du cours.
4) $P(D)P(T) = \frac{60}{150} \times \frac{78}{150} = \frac{26}{125}$ et $P(D \cap T) = \frac{33}{150} = \frac{11}{50} \neq \frac{26}{125}$ donc D et T ne sont pas indépendants.
5) $P(A)P(V) = \frac{90}{150} \times \frac{45}{150} = \frac{9}{50}$ et $P(A \cap V) = \frac{27}{150} = \frac{9}{50} = P(A)P(V)$ donc A et V sont indépendants .

Exercice 2

1) Faire un arbre
2) $P((B;B;N)) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$
3) « avoir au moins deux boules blanches » = $\{(B;B;N);(B;N;B);(N;B;B);(B;B;B)\}$.
4) $P($« avoir au moins deux boules blanches »$)$ $= \frac{6}{35} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{22}{35}$.
5) $P($« avoir au moins une boule blanche »$) = 1 -$ $P($« avoir aucune boule blanche »$) = 1 - \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{34}{35}$
6) $P_{\text{avoir au moins une boule B}}(\text{"la première boule tirée est B"}) = \frac{P(\text{« avoir au moins une boule B »} \cap \text{"la première boule tirée est B"})}{P(\text{« avoir au moins une boule B »})} = \frac{P(\text{"la première boule tirée est blanche"})}{P(\text{« avoir au moins une boule blanche »})} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{34}{35}} = \frac{4}{7} \times \frac{35}{34} = \frac{10}{17}$



Exercice 3

p est la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée donc $P(C) = p$ et $P(\bar{C}) = 1 - p$. S'il connait la réponse il la donne donc $P_C(B) = 1$

S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées donc $P_{\bar{C}}(B) = \frac{1}{m}$.

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(B \cap C)}{P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C})} = \frac{P(C)P_C(B)}{P(C)P_C(B) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(B)} = \frac{p \times 1}{p \times 1 + (1-p)\frac{1}{m}} = \frac{pm}{pm + (1-p)}$$

Exercice 4

Une propriété du cours dit que (A et B indépendants) ⇔ (A et $\bar{B}$ indépendants)
⇔ ($\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants) ⇔ ($\bar{A}$ et B indépendants)

Nous allons prouver une partie de cette propriété (du coup on n'a pas le droit de l'utiliser dans la preuve)

Soit A et B deux évènement indépendants.

1) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
2) $P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$ car A et B sont indépendants.
$= P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B)P(\bar{A})$ donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.
3) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A})P(B)$ car $\bar{A}$ et B sont indépendants.
$= P(\bar{A})\big(1 - P(B)\big) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ donc $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.