# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## Partie 1 : Probabilités conditionnelles et tableaux

Définition :
On appelle **probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$**, la probabilité que l'événement $B$ se réalise sachant que l'événement $A$ est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Remarque : On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :
$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|---|---|---|---|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
$A$ : « Le patient a pris le médicament A. »
$G$ : « Le patient est guéri. »
Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.
Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri.
b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.
Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B.

**Toutes les corrections se feront sur le cahier côté cours (ou sur des pages de classeurs)**

Propriété : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit $A$ l'événement : « Le résultat est un pique ».
Soit $B$ l'événement : « Le résultat est un roi ».
Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

# Partie 2 : Arbre pondéré et probabilités totales

1) Propriétés

Formules : Soit $A$ et $B$ deux événements avec $P(A) \neq 0$.
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

2) Construire un arbre pondéré

Exemple :
On donne : $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}2$

● On reporte ces probabilités dans l'arbre :

● On complète les probabilités manquantes :

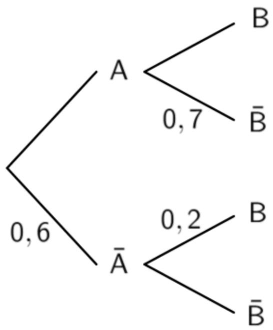
● On calcule les probabilités d'intersections :

Méthode : Construire un arbre pondéré

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

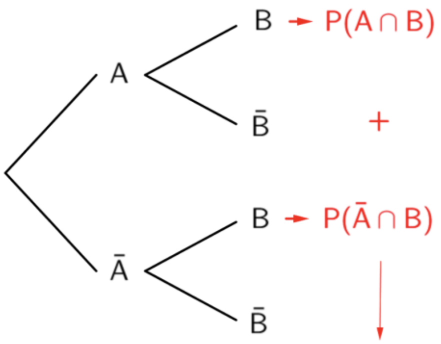
a) Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.

b) À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$.




3) Formule des probabilités totales

Propriété :




$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

(Formule des probabilités totales)

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement $M$ et $T$ les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

*D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010*

# Partie 3 : Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition :
On dit que deux évènements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :
On dit que deux évènements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Méthode : Démontrer l'indépendance de deux évènements

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit $R$ l'événement : « On tire un roi ».
Soit $T$ l'événement : « On tire un trèfle ».
Les événements $R$ et $T$ sont-ils indépendants ?
b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Les événements $R$ et $T$ sont-ils indépendants ?

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux évènements (1)
Dans une population, un individu est atteint par la maladie *m* avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie *n* avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit $M$ l'événement : « L'individu a la maladie *m* ».
Soit $N$ l'événement : « L'individu a la maladie *n* ».
On suppose que les événements $M$ et $N$ sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement $E$ : « L'individu a au moins une des deux maladies ».

Propriété : Si $A$ et $B$ sont indépendants alors $\bar{A}$ et $B$ sont indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux évènements (2)

Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.
Soit $A$ l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6 ».
Soit $B$ l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7 ».
On suppose que les événements $A$ et $B$ sont indépendants.
Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6.

## 2) Succession de deux épreuves indépendantes

Exemples :
a) On lance un dé et on note le résultat. Puis on lance une pièce de monnaie et on note le résultat. Ces deux expériences sont indépendantes.
b) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite.
Ces dix expériences sont identiques et indépendantes.

Méthode : Calculer une probabilité sur une répétition d'expériences

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités des évènements suivants :
    a) Obtenir deux boules blanches.
    b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge.
    c) Obtenir au moins une boule blanche.