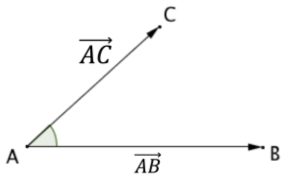
PRODUIT SCALAIRE

Partie 1 : Définitions et propriétés

1) Définitions

Définition : Soit deux points A et B.
La **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Définition : Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$.



Propriété :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

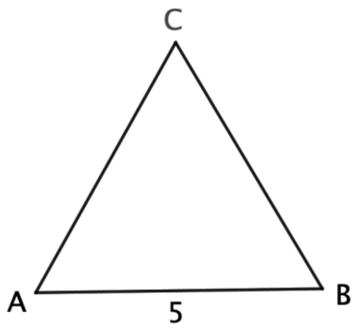
Remarques :
- $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».
- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$,

Exemple :
On donne : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule du cosinus

a) Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Soit I le milieu de $[AB]$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité :
1) $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$
2) $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Identités remarquables :

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ $\longrightarrow$ On peut également noter : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Méthode : Appliquer les propriétés du produit scalaire

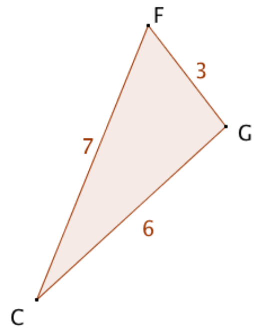
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : $\vec{u}.\vec{v} = 1$.

Calculer : a) $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}-\vec{v})$ b) $\vec{u}\,.\,(\vec{u}+\vec{v})$ c) $-2\vec{v}.(3\vec{u}-\vec{v})$

Partie 2 : Produit scalaire et norme

Propriété : Soit A, B et C trois points. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

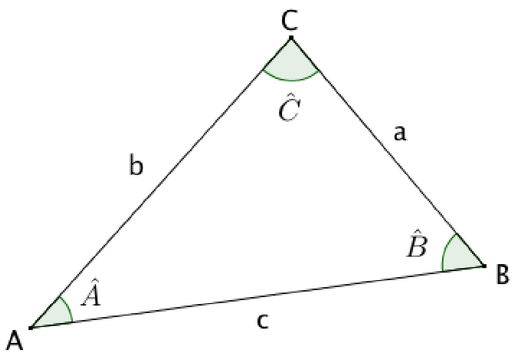
Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes



On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.

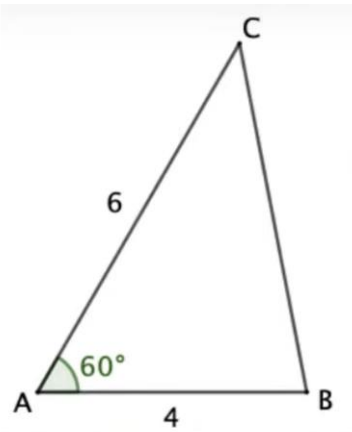
Théorème d'Al Kashi : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$



Démonstration au programme :

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer une longueur

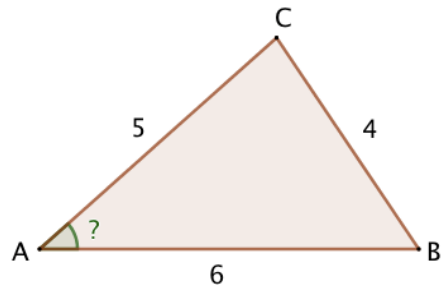


On considère la figure ci-contre.

Calculer la longueur BC. On donnera une valeur arrondie au dixième.

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer un angle

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



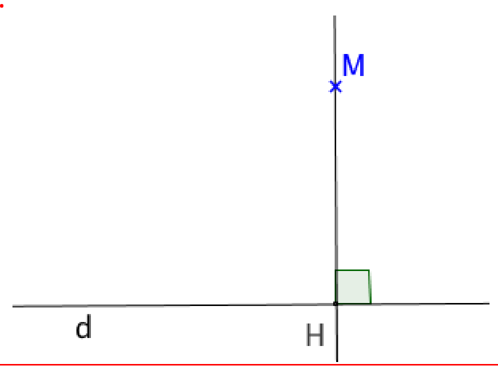
Partie 3 : Produit scalaire et orthogonalité

1) Projeté orthogonal

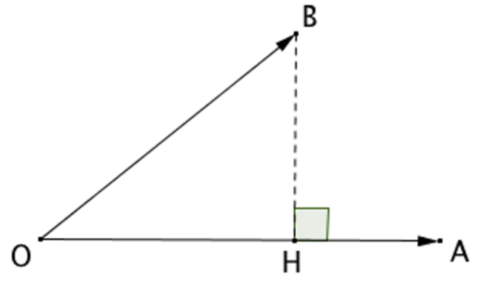
Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Définition : Soit une droite *d* et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.

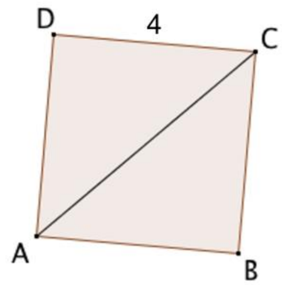


Propriété : Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Démonstration :.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

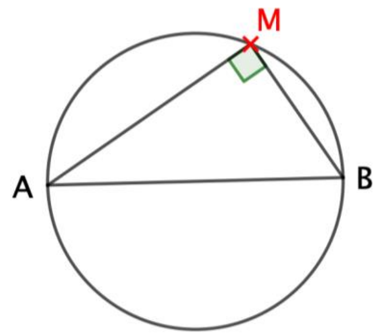


Soit un carré $ABCD$ de côté 4.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

2) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration au programme :



Comme $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
L'ensemble des points M tel que le triangle ABM soit rectangle en M est donc le cercle de diamètre $[AB]$.

Méthode : Appliquer l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

On donne deux points A et B.
Représenter l'ensemble des points P, tel que : $PB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB}$

Partie 4 : Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (1)

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (2)

On considère quatre points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Méthode : Appliquer plusieurs formules du produit scalaire

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOD}$ en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ de deux façons.
On pourra lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère ci-contre.