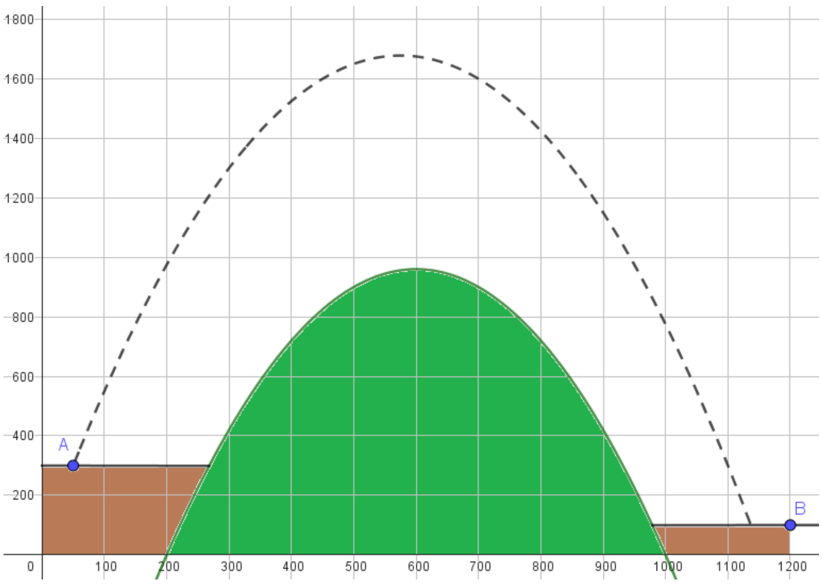
Devoir maison

www.dimension-k.com

En 1996 alors que j'étais en première, un jeu vidéo était échangé de calculatrice en calculatrice. Le programme fonctionnait ainsi :

- De part et d'autre d'une montagne deux châteaux A et B essayent de se détruire à l'aide de tirs d'obus de mortier. Les joueurs pouvaient contrôler l'orientation de leur canon et la puissance du tir.
- A chaque partie la montagne est générée de manière aléatoire à l'aide d'une fonction polynôme du second degré.
- Les châteaux A et B sont toujours placés aux mêmes abscisses (respectivement $x_A = 50$ et $x_B = 1200$)
- Les des deux bâtiments sont placés sur des plateformes dont les ordonnées y_A et y_B sont choisies de manière aléatoire entre 0 et 600.
- Pour chaque tir de mortier, l'obus explose au moment de l'impact, c'est-à-dire quand il aura pour altitude la hauteur du château adverse qui sera assimilée à celle de la plateforme sur laquelle il repose.
- Tout ce qui est dans situé dans un rayon de 10 mètres autour du point d'impact est détruit.



Partie 1

Voici avec Geogebra la représentation de ce qui se passe si dans une partie où :

$y_A = 300$ $\qquad y_B = 100$

La colline est donnée par la fonction :

$$f(x) = -\frac{3}{500}x^2 + \frac{36}{5}x - 1200$$

La trajectoire de l'obus partant de A est donnée par

$$g(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{23}{4}x + 25$$

1) Déterminer les écritures canoniques de f et g.
2) Dire pourquoi trouver l'abscisse du point d'impact revient à résoudre l'équation $g(x) = 100$
3) Résoudre cette équation et dire si le château B est dans la zone de destruction.

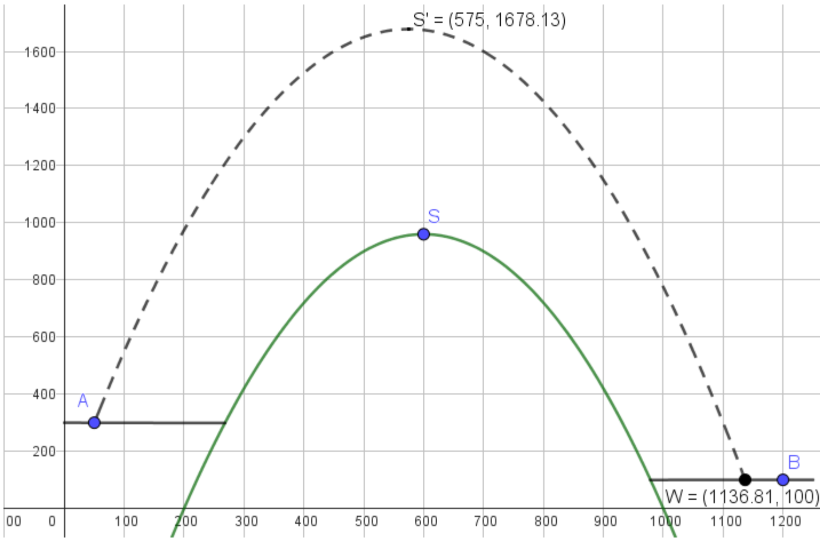
Partie 2

On commence une nouvelle partie et on observe que :

- Les plateformes sur lesquelles sont placés les châteaux A et B ont pour hauteurs respectives 200 et 600
- La colline est la représentation graphique de la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points de coordonnées $P(0;-800)$, $Q(300;1200)$ et $R(900;-200)$.

1) A l'aide des coordonnées du point P déduire la valeur de c
2) Déduire des coordonnées de Q et R deux équations en fonctions de a et b
3) Résoudre le système ainsi obtenu. Puis, à la main ou avec Geogebra faire une représentation de la situation.
4) Donner le tableau des variations de la fonction f
5) Donner les points d'intersection des deux plateformes avec la colline.
6) Trouver les valeurs de b_1 et c_1 tels que la courbe de $g_1(x) = -0{,}004x^2 + b_1x + c_1$ passe par A et B
7) Faire le dessin, et en déduire le problème.
8) Trouver une approximation des coordonnées du point d'impact (on utilisera une lecture graphique).
9) Est-ce que la courbe représentative de $g_2(x) = -0{,}02x^2 + 25x - 1000$ passe par A et B?
10) Est-ce que le château est B est touché ? Est-ce que la colline est touchée ?

Correction devoir maison www.dimension-k.com



Partie 1

1).
f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{3}{500} = -0{,}006$ $b = \frac{36}{5} = 7{,}2$ et $c = -1200$
On peut donc l'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7{,}2}{-0{,}012} = 600$
et $\beta = f(\alpha)$
$= -0{,}006 \times 600^2 + 7{,}2 \times 600 - 1200$
$= 960$
Ainsi $f(x) = -\frac{3}{500}(x-600)^2 + 960$
g est de la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{200} = -0{,}005$ $b = \frac{23}{4} = 5{,}75$ et $c = 25$
On peut donc l'écrire sous la forme $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5{,}75}{-0{,}01} = 575 \text{ et } \beta = g(\alpha) = -0{,}005 \times 575^2 + 5{,}75 \times 575 + 25 = 1678.125 = \frac{13425}{8}$$

$$g(x) = -\frac{1}{200}(x-575)^2 + \frac{13425}{8}$$

2)
L'obus explose quand il atteint un objet que ce soit la colline ou la plateforme de l'adversaire. Visiblement c'est cette dernière qui sera impactée et comme sa hauteur est de 100, et comme g donne la hauteur de l'obus pour une abscisse x donnée trouver l'abscisse du point d'impact c'est trouver pour quel x est ce qu'on aura $g(x) = 100$

3)
$g(x) = 100 \Leftrightarrow -0{,}005\,x^2 + 5{,}75\,x + 25 = 100 \Leftrightarrow -0{,}005\,x^2 + 5{,}75\,x - 75 = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -0{,}005$ $b = 5{,}75 = \frac{23}{4}$ et $c = -75$
$\Delta = b^2 - 4ac = 5{,}75^2 - 4(-0{,}005)(-75) = 31.5625$ ou $\frac{505}{16}$
$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5{,}75-\sqrt{31.5625}}{2(-0{,}005)} = \frac{-5{,}75+\sqrt{31.5625}}{-0{,}01} \approx 13.19$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5{,}75+\sqrt{31.5625}}{2(-0{,}005)} = \frac{-5{,}75-\sqrt{31.5625}}{-0{,}01} \approx 1136.81$
Les abscisses de la zone de destruction forment l'intervalle $I_d = [x_2 - 10; x_2 + 10]$ or $x_2 - 10 \approx 1126.81$ et $x_2 + 10 \approx 1146.81$ donc 1200 n'est pas dans cet intervalle.

Partie 2

1) C_f passe par $P(0;-800)$ donc $f(0) = -800$. Ainsi $a0^2 + b0 + c = -800$ et donc $c = -800$

2) $\begin{cases} Q(300;1200) \in C_f \\ R(900;100) \in C_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(300) = 1200 \\ f(900) = -200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a300^2 + b300 - 800 = 1200 \\ a900^2 + b900 - 800 = -200 \end{cases}$

3) $\begin{cases} Q(300;1200) \in C_f \\ R(900;-200) \in C_f \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 90\,000a + 300b = 1200 + 800 \\ 810\,000a + 900b = -200 + 800 \end{cases}$

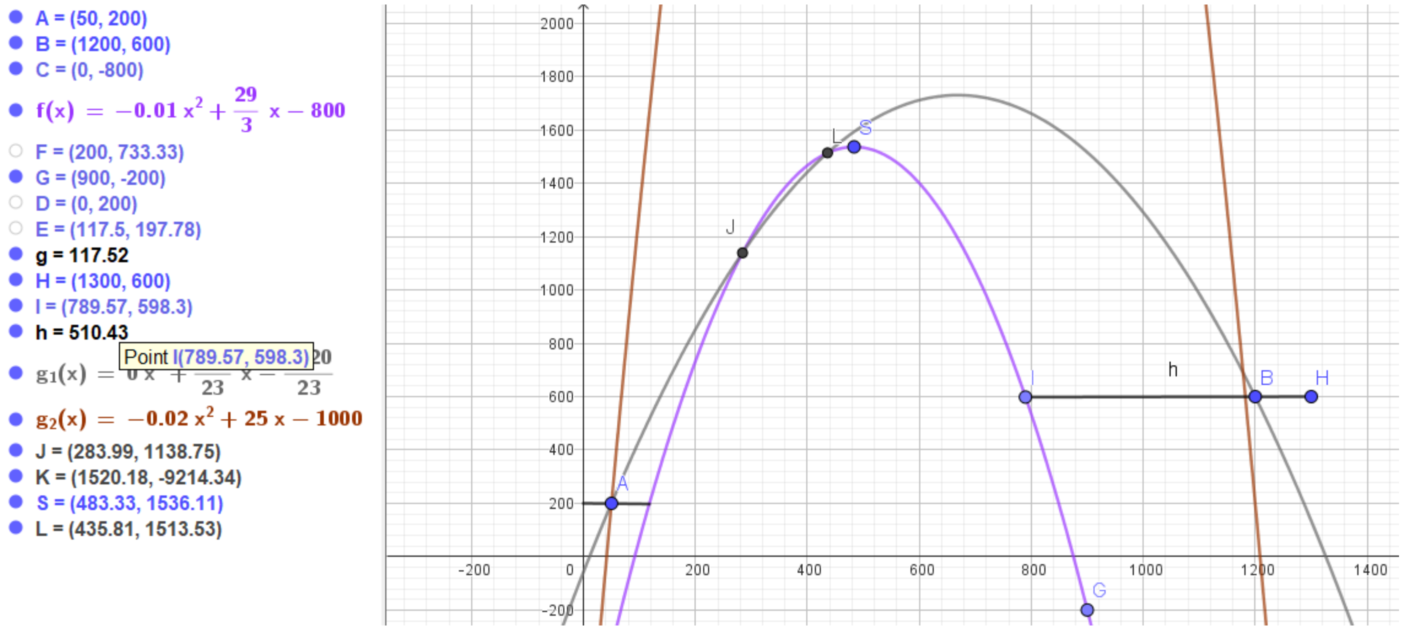
$\Leftrightarrow \begin{cases} 90\,000a + 300b = 2\,000 \\ 810\,000a + 900b = 600 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 270\,000a + 900b = 6000 \\ 810\,000a + 900b = 600 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 270\,000a + 900b = 6000 \\ 540\,000a = -5\,400 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 270\,000a + 900b = 6000 \\ a = -\frac{5\,400}{540\,000} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 270\,000(-0{,}01) + 900b = 6000 \\ a = -0{,}01 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 900b = 6000 + 2\,700 \\ a = -0{,}01 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8700}{900} \\ a = -0{,}01 \end{cases}$ Ainsi $f(x) = -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 800$

(valeur coup de pouce pour élèves en difficulté : $a = -0{,}01$ $b = 10$



4)

f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -0{,}01$ $\quad b = \frac{29}{3}$ $\quad$ et $c = -800$

On peut donc l'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{29}{3}}{-0{,}02} = \frac{1450}{3}$ et $\beta = f(\alpha) = -0{,}01 \times \left(\frac{1450}{3}\right)^2 + \frac{29}{3} \times \frac{1450}{3} - 800 = \frac{13825}{9}$

Comme $a < 0$ f sera croissante de $-\infty$ à $\frac{1450}{3}$ où elle atteindra la hauteur $\frac{13825}{9}$ puis décroissante jusqu'à $+\infty$

5)

$f(x) = 200 \Leftrightarrow -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 800 = 200 \Leftrightarrow -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 1\,000 = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -0{,}01$ $\quad b = \frac{29}{3}$ $\quad$ et $c = -1000$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{29}{3}\right)^2 - 4(-0{,}01)(-1000) = \frac{481}{9}$

$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{29}{3}-\sqrt{\frac{481}{9}}}{2(-0{,}01)} = \frac{\frac{29}{3}+\sqrt{\frac{481}{9}}}{0{,}02} \approx 848{,}9$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{29}{3}+\sqrt{\frac{481}{9}}}{2(-0{,}01)} = \frac{\frac{29}{3}-\sqrt{\frac{481}{9}}}{0{,}02} \approx 117{,}8$

Des deux valeurs on prendra la plus petite 117,8 car on cherche la hauteur de la plateforme de droite.

$f(x) = 600 \Leftrightarrow -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 800 = 600 \Leftrightarrow -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 1\,400 = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -0{,}01$ $\quad b = \frac{29}{3}$ $\quad$ et $c = -1400$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{29}{3}\right)^2 - 4(-0{,}01)(-1400) = \frac{337}{9}$

$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{29}{3}-\sqrt{\frac{337}{9}}}{2(-0{,}01)} = \frac{-\frac{29}{3}-\sqrt{\frac{337}{9}}}{-0{,}02} \approx 789{,}3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{29}{3}+\sqrt{\frac{337}{9}}}{2(-0{,}01)} = \frac{-\frac{29}{3}+\sqrt{\frac{337}{9}}}{-0{,}02} \approx 177{,}4$

Des deux valeurs on prendra 789,3, la plus grande, car on cherche la hauteur de la plateforme de droite

6)

$g_1(x) = -0{,}004x^2 + b_1x + c_1$ passe par A(50 ;200) et B(1200 ;600) $\Leftrightarrow \begin{cases} g_1(50) = 200 \\ g_1(1200) = 600 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}004 \times 50^2 + 50b_1 + c_1 = 200 \\ -0{,}004 \times 1200^2 + 1200b_1 + c_1 = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50b_1 + c_1 = 200 + 10 \\ 1200b_1 + c_1 = 600 + 5\,760 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50b_1 + c_1 = 210 \\ 1200b_1 + c_1 = 6\,360 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 50b_1 + c_1 = 210 \\ 1150b_1 = 6\,150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50\frac{6150}{1150} + c_1 = 210 \\ b_1 = \frac{6150}{1150} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 210 - 50\frac{123}{23} \\ b_1 = \frac{123}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1320}{23} \\ b_1 = \frac{123}{23} \end{cases}$

$$g_1(x) = -0{,}004x^2 + \frac{123}{23}x - \frac{1320}{23}$$

7) la trajectoire traverse la colline, l'obus ne pourra donc atteindre le château comme prévu.

8)

Pour déterminer par le calcul les coordonnées du point d'impact, autrement dit du premier point d'intersection il nous faut résoudre l'équation $f(x) = g_1(x)$

$\Leftrightarrow -0{,}01x^2 + \frac{29}{3}x - 800 = -0{,}004x^2 + \frac{123}{23}x - \frac{1320}{23}$

$\Leftrightarrow 0 = 0{,}006x^2 + \left(\frac{123}{23} - \frac{29}{3}\right)x + 800 - \frac{1320}{23}$

$\Leftrightarrow 0 = 0{,}006x^2 - \frac{298}{69}x + \frac{17080}{23}$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 0{,}006$ $\quad b = -\frac{298}{69}$ $\quad$ et $c = \frac{17080}{23}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{298}{69}\right)^2 - 4(0{,}006)\left(\frac{17080}{23}\right) = \frac{98764}{119025}$

$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{298}{69} - \sqrt{\frac{98764}{119025}}}{2(-0{,}006)} = \frac{\frac{298}{69} + \sqrt{\frac{98764}{119025}}}{0{,}012} \approx 435{,}8$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{298}{69} + \sqrt{\frac{98764}{119025}}}{2(-0{,}006)} = \frac{\frac{298}{69} - \sqrt{\frac{98764}{119025}}}{0{,}012} \approx 284$

Si le tir part de A, le point d'impact aura donc pour abscisse $x_2 \approx 284$ son ordonnée sera $f(x_2) = g(x_2) \approx 1138{,}8$
Si le tir part de B, le point d'impact aura donc pour abscisse $x_1 \approx 435{,}8$ son ordonnée sera $f(x_1) \approx 11513{,}5$

9)
Est-ce que la courbe représentative de $g_2(x) = -0{,}02x^2 + 25x - 1000$ passe par $A(50; 200)$?
$g_2(50) = -0{,}02 \times 50^2 + 25 \times 50 - 1000 = -50 + 1250 - 1000 = 200$ donc oui la trajectoire passe par A

Est-ce que ça passe par $B(1200; 600)$?
$g_2(1200) = -0{,}02 \times 1200^2 + 25 \times 1200 - 1000 = -28\,800 + 30000 - 1000 = 200 \neq 600$ donc la trajectoire ne passe pas par B.

10)
Est-ce que ça explose près de B ? Regardons l'abscisse du point d'arrivé.

$g_2(x) = 600 \Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 25x - 1000 = 600 \Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 25x - 1600 = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -0{,}02$ $\quad b = 25$ $\quad$ et $c = -1600$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25^2 - 4(-0{,}02)(-1600) = 497$

$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25-\sqrt{497}}{2(-0{,}02)} \approx 1182$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25+\sqrt{497}}{2(-0{,}02)} \approx 67{,}7$

x_1 correspond à l'impact sur la plateforme de droite. Comme prévu, on n'arrive pas à 1200. La bombe tombe 18 mètres avant le château. Celui-ci n'est donc pas dans la zone de destruction qui a un rayon de seulement 10mètres.

11)
Quand on trace la trajectoire empruntée par l'obus n'a pas de contact avec la colline.

$g_2(x) = f(x) \Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 25x - 1000 = -0{,}01x^2 + 10x - 800 \Leftrightarrow -0{,}01x^2 + 15x - 200 = 0$

$\Leftrightarrow -0{,}01x^2 + 15x - 200 = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -0{,}01$ $\quad b = 15$ $\quad$ et $c = -200$

$\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4(-0{,}01)(-200) = 225 - 8 = 217$

$\Delta > 0$ donc il y aura deux solutions : $\quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-\sqrt{217}}{2(-0{,}01)} \approx 1486.55$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15+\sqrt{217}}{2(-0{,}01)} \approx 13.45$

Les courbes des deux fonctions se coupent mais c'est avant le lancement de l'obus et après son explosion. La trajectoire elle n'est jamais en contact avec la colline.

Remarques :
Maintenant qu'on est en première, quand on fait un calcul ou un raisonnement, chaque ligne/argument doit être connecté à ce qui précède à l'aide d'un lien logique : donc, si et seulement si, ainsi, = , ⇔ , ⟹, ≈. Ces mots et symboles ne sont pas interchangeables.

Dans les tableaux de variations on doit utiliser des valeurs exactes.