SECOND DEGRÉ

I Fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque : Une fonction polynôme du second degré s'appelle également « trinôme ».

Exemples et contre-exemples :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5} \\ h(x) = 4 - 2x^2 \\ k(x) = (x-4)(5-2x) \end{array}\right\}$$ sont des fonctions polynômes du second degré.

$m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme du premier degré (fonction affine).

$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Propriété :
Toute fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration :
Comme $a \neq 0$, on peut écrire : $f(x) = ax^2 + bx + c$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
Écrire f sous sa forme canonique.

Correction

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
où a, α et β sont des nombres réels.

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

....

....

....

....

....

....

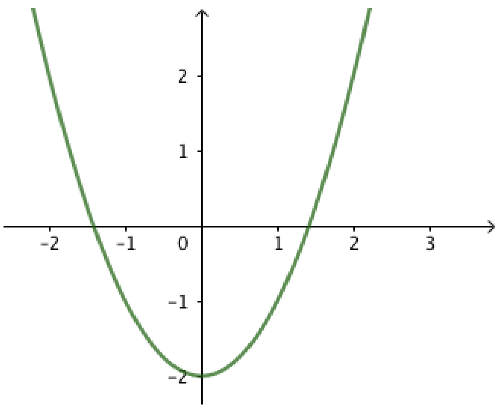
....

III Variations, extremum et représentation graphique

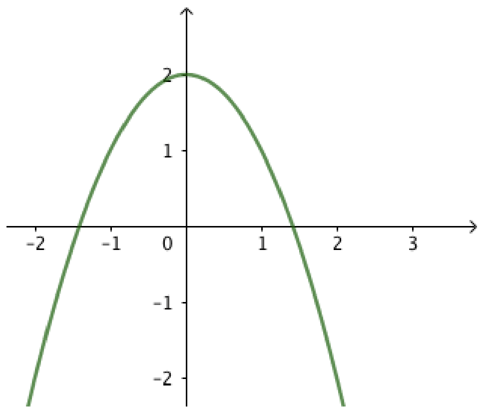
1) Variations

Propriétés :
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : « ☺ ».
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : « ☹ ».

$a > 0$



$a < 0$



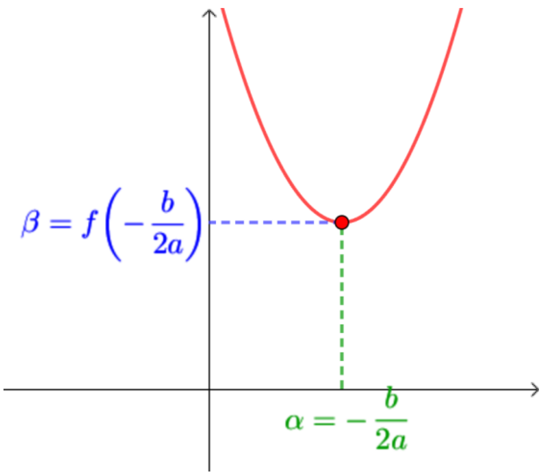
2) Extremum

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$
On a : $2(x-1)^2 \geq 0$
Donc : $2(x-1)^2 + 3 \geq 3$
Soit : $f(x) \geq 3$
Or : $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.
f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

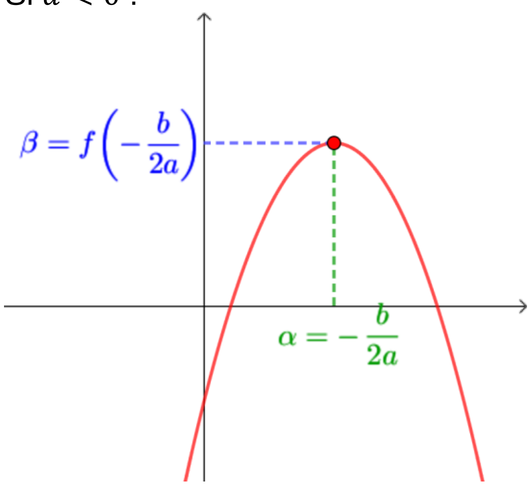
Propriété :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.
- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Propriété : Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on a : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Si $a > 0$:



Si $a < 0$:



Définition :
La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une **parabole**.
Le point de coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole.
Il correspond à l'extremum de la fonction f.

Propriété :
La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Soit la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$.
Déterminer le sommet de la parabole de f et son axe de symétrie.

Correction

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

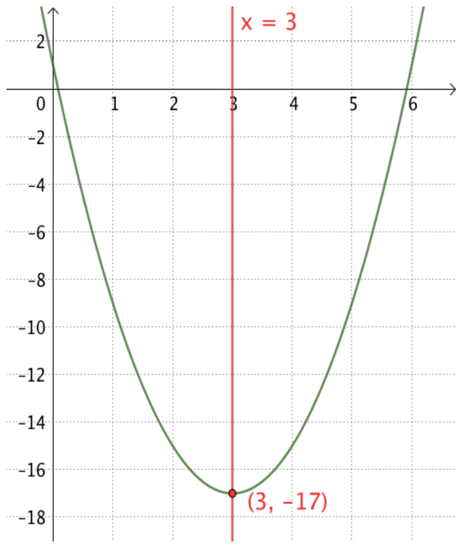
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………



3) <u>Représentation graphique</u>

<u>Méthode :</u> Représenter graphiquement une fonction polynôme du second degré

Représenter graphiquement la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

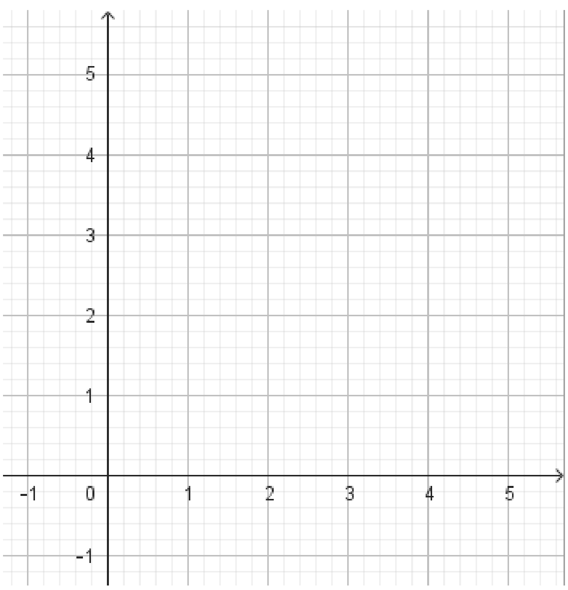
Correction
Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :
En factorisant avec les formules $\alpha =$………………… et $\beta =$…………………
$f(x) = -x^2 + 4x$
……
……
……
……

f admet donc un maximum en $\alpha =$…….. égal à $\beta =$……..

Les variations de f sont donc données dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Pour représenter graphiquement la fonction f, on calcule les coordonnées de quelques points appartenant à la courbe :
$f(0) =$ ……………………………………………………
$f(1) =$ ……………………………………………………
On obtient d'autres points par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$.
On trace la courbe représentative de f ci-contre.



IV Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration au programme :
On a vu au début du chapitre que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

……

……

……

……

……

- Si $\Delta < 0$:

……

……

- Si $\Delta = 0$: L

……

……

……

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

……

……

……

………

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Correction

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

………

………

………

………

………

………

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$:

………

………

………

………

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

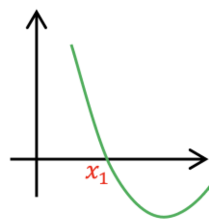
………

………

Définition :

Pour une fonction polynôme f du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle les **racines** de f.

Remarque : Dans la pratique, une racine x_1 de f vérifie $f(x_1) = 0$.
La courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.



Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Méthode : Utiliser les formules de somme et produit des racines

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
1) Montrer que $x_1 = 1$ est une racine de f.
2) Déterminer la deuxième racine.

Correction

………

………

………

………

………

………

………

V Factorisation et signe d'un trinôme

1) Factorisation

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec x_0 racine de f.
- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec x_1 et x_2 racines de f.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Déterminer les fonctions du second degré, s'annulant en deux nombres réels distincts

On considère la fonction polynôme f du second degré s'annulant en -1 et 2 et tel que $f(3) = -2$.
Déterminer une expression factorisée de la fonction f.

Correction

………

………

………

………

………

………

………

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

Correction

………

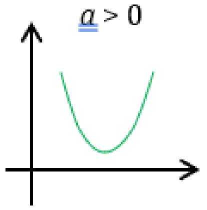
………

2) Signe d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

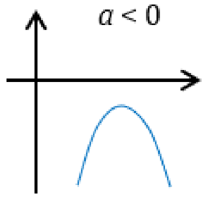
- Si $\Delta < 0$: f ne possède pas de racine. Donc f ne s'annule pas.

$a > 0$



x	$-\infty$		$+\infty$
f		$+$	

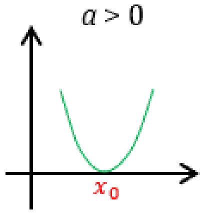
$a < 0$



x	$-\infty$		$+\infty$
f		$-$	

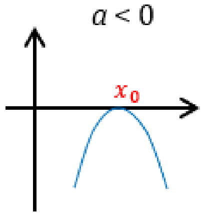
- Si $\Delta = 0$: f possède une unique racine x_0. Donc f s'annule en x_0.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		$+$	0	$+$	

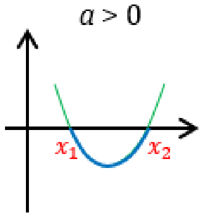
$a < 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		$-$	0	$-$	

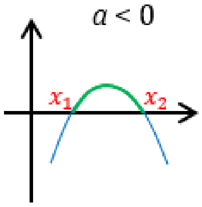
- Si $\Delta > 0$: f possède deux racines x_1 et x_2. Donc f s'annule en x_1 et x_2.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a < 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

Méthode : Déterminer le signe d'un trinôme

Démontrer que la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 2x^2 + x + 4$ est positive.

Correction

………

………

………

………

………

………

………

Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre les inéquations : a) $x^2 - 2x - 15 < 0$
b) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

Correction

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……

……

……

3) Application

Méthode : Étudier la position de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Correction

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………