

Exercices sur les polynômes du second degré

Corrections

Exercice 1

$$f(x) = 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x - 1)(3x + 1)$$

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x)1 + 1 = (2x - 1)^2$$

$$h(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x)^2 + 2(\sqrt{2}x)1 + 1^2 = ((\sqrt{2}x) + 1)^2$$

$$i(x) = x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 5 + 5^2 = (x^2 + 5)^2$$

Exercice 2

$$f(x) = 1x^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(0)^2 + b(0) + c = 1 \\ 1(2)^2 + b(2) + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4 + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } f(x) = 1x^2 - 2x + 1$$

Exercice 1. Factoriser les expressions suivantes.

$$f(x) = 9x^2 - 1 \quad g(x) = 4x^2 - 4x + 1 \quad h(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \quad i(x) = x^4 + 10x^2 + 25.$$

Exercice 2. Soit f une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est 1 et telle que $f(0) = f(2) = 1$. Déterminer l'expression développée de f

Exercice 3. Écrire les trinômes suivants sous forme canonique.

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad g(x) = x^2 + x + 1 \quad h(x) = 3x^2 + x - 2 \quad i(x) = 5x^2 - 7x + 1$$

Exercice 3

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$\text{Donc } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 1, b = 2, c = 3$$

$$\text{Et donc } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ et } \beta = f(\alpha) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$$

$$\text{Ainsi } f(x) = 1(x - (-1))^2 + 2$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$\text{Donc } g(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 1, b = 1, c = 1$$

$$\text{Et donc } g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = g(\alpha) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0,75$$

$$\text{Ainsi } g(x) = 1\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 0,75$$

$$h(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$\text{Donc } h(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 3, b = 1, c = -2$$

$$\text{Et donc } h(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{6} \text{ et } \beta = h\left(-\frac{1}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) - 2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{12} - \frac{2}{12} - \frac{24}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$\text{Ainsi } h(x) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \left(-\frac{25}{12}\right)$$

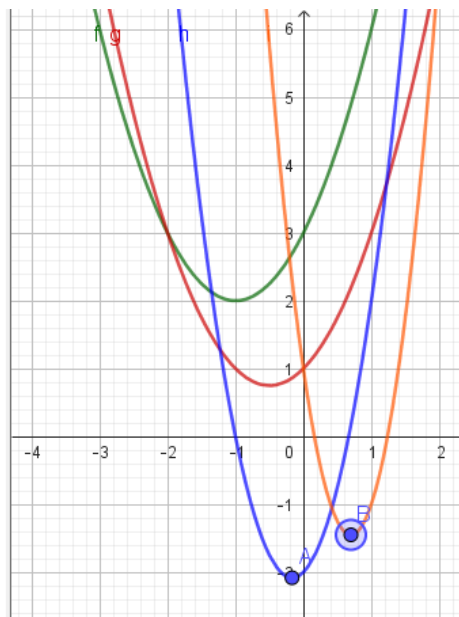
$$i(x) = 5x^2 - 7x + 1$$

$$\text{Donc } i(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a = 5, b = -7, c = 1$$

$$\text{Et donc } i(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \times 5} = 0,7$ et $\beta = i(\alpha) = 5(0,7)^2 - 7(0,7) + 1 = -1,45$
 Ainsi $i(x) = 5(x - 0,7)^2 - 1,45$

- $f(x) = x^2 + 2x + 3$
- $g(x) = x^2 + x + 1$
- $h(x) = 3x^2 + x - 2$
- $A = (-0,17, -2,08)$
- $i(x) = 5x^2 - 7x + 1$
- $B = (0,7, -1,45)$



Exercice 4. Soit $f : x \mapsto 3x^2 + x + 2$. En utilisant la forme canonique, montrer que, pour tout réel x , $f(x) > 0$.

Exercice 4

La fonction $f : x \mapsto 3x^2 + x + 2$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3, b = 1$ et $c = 2$

Ainsi $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{6} \text{ et } \beta = f\left(-\frac{1}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 2 = \frac{1}{12} - \frac{2}{12} + \frac{24}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\text{Ainsi } f(x) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12}$$

On sait que $\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \geq 0$ et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \geq 3 \times 0$

et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12} \geq \frac{23}{12}$ or $\frac{23}{12} > 0$

et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12} > 0$

Exercice 5. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

1. Écrire f sous forme canonique.
2. En déduire une forme factorisée de f .
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 5

1) La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -4$ et $c = 3$

Ainsi $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \text{ et } \beta = f(2) = 1(2)^2 - 4(2) + 3 = -1$$

$$\text{Ainsi } f(x) = (x - 2)^2 + (-1)$$

$$2) f(x) = (x-2)^2 - 1^2 = [(x-2) - 1][(x-2) + 1] = [x-3][x-1]$$

$$3) f(x) = 0 \Leftrightarrow [x-3][x-1] = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1 \quad S = \{1; 3\}$$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes par la méthode qui vous semble la plus courte.

$$(E_1) : 4x^2 - 9 = 0 \quad (E_2) : 2(x-1)(x+2) = 0 \quad (E_3) : x - 3x^2 = 0 \quad (E_4) : x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(E_5) : x^2 - x - 6 = 0 \quad (E_6) : 2x^2 + x - 3 = 0 \quad (E_7) : 2x^2 + x + 3 = 0 \quad (E_8) : -x^2 + 2x + 1 = 0$$

Exercice 6

$$(E_1) : 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow [2x-3][2x+3] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 0 \text{ ou } 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$$

$$(E_2) : 2(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ ou } (x-1) = 0 \text{ ou } (x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{-2; 1\}$$

$$(E_3) : x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{1}{3} = x$$

$$S = \left\{ 0; \frac{1}{3} \right\}$$

$$(E_4) : x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$S = \{-3\}$$

$$(E_5) : x^2 - x - 6 = 0 \text{ on reconnaît } ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a = 1, b = -1 \text{ et } c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$$

Il y aura donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$S = \{-2; 3\}$$

$$(E_6) : 2x^2 + x - 3 = 0 \text{ on reconnaît } ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a = 2, b = 1 \text{ et } c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 > 0$$

Il y aura donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-1+5}{4} = 1$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$$

$$(E_7) : 2x^2 + x + 3 = 0 \text{ on reconnaît } ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a = 2, b = 1 \text{ et } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (3) = -23 < 0$$

Il y aura donc aucune solution : $S = \emptyset$

$(E_8): -x^2 + 2x + 1 = 0$ on reconnaît $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1, b = 2$ et $c = 1$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8 > 0$

Il y aura donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2(1 + \sqrt{2})}{-2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2(-1 + \sqrt{2})}{2 \times (-1)} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{-1} = 1 - \sqrt{2}$$

$$S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$$

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$(E_1) \quad x^2 + 2\sqrt{2}x - 3 = 0 \quad (E_2) \quad -x^2 + x + 1 = 3x - 7$$

$$(E_3) \quad (x - 2)(-3x^2 + 19x - 6) = 0 \quad (E_4) \quad x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0.$$

Exercice 7

$$(E_1) : x^2 + 2\sqrt{2}x - 3 = 0$$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1, b = 2\sqrt{2}$ et $c = -3$

On a donc $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 8 + 12 = 20$
 $\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$S = \{-\sqrt{2} - \sqrt{5}; -\sqrt{2} + \sqrt{5}\}$$

$$(E_2) : -x^2 + x + 1 = 0$$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1, b = 1$ et $c = 1$

On a donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$
 $\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} \quad S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$(E_3): (x - 2)(-3x^2 + 19x - 6) = 0$$

Ainsi $x - 2 = 0$ ou $-3x^2 + 19x - 6 = 0$

Concentrons-nous sur la deuxième équation :

On reconnaît $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -3, b = 19$ et $c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4(-3)(-6) = 361 - 72 = 289$

$\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19-\sqrt{289}}{2 \times (-3)} = \frac{-19-17}{-6} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19+\sqrt{289}}{2 \times (-3)} = \frac{-19+17}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \quad S = \left\{ \frac{1}{3}; 6 \right\}$$

$$(E_1) : x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -(1 + \sqrt{2})$ et $c = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \Delta = b^2 - 4ac &= \left(-(1 + \sqrt{2}) \right)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 \\ &= (1 - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2 \times 1} = \frac{(1+\sqrt{2})-(-(1-\sqrt{2}))}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2 \times 1} = \frac{(1+\sqrt{2})+(-(1-\sqrt{2}))}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S = \{1; \sqrt{2}\}$$

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$(E_1) : \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \quad (E_2) : \frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x \quad (E_3) : x + \frac{1}{x} = 3 \quad (E_4) : 4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$$

$$(E_5) : -2x + 9\sqrt{x} - 4 = 0 \quad (E_6) : -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 1 = 0 \quad (E_7) : \sqrt{x+4} = 7 - 2x$$

$$(E_8) : (x^2-5)^2 + 22(x^2-5) + 121 = 0 \quad (E_9) : x^3 - 3x^2 = x \quad (E_{10}) : mx^2 - \sqrt{m}x + 1 = 0 \text{ où } m \in \mathbb{R}_+$$

$(E_1) : \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ comme $x^2 \geq 0$ on aura $x^2 + 1 > 0$ et donc je peux multiplier les deux membres par cette expression

$$(E_1) \Leftrightarrow 2x = 1(x^2 + 1) \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$(E_2) : \frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x$$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ donc dans la mesure où $x \neq 4$ j'ai le droit de multiplier par $x - 4$ les deux membres. Ainsi sur $D_e = \mathbb{R} - \{4\}$ on aura

$$(E_2) \Leftrightarrow \frac{3x^2-8x+16}{x-4} (x-4) = 2x(x-4) \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 8x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16 \text{ or un carré ne peut être négatif donc } S = \emptyset$$