Corrigé du devoir maison sur les suites (version commentée)

Exercice 1

1. Recherche des variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 - 2n^2 + n - 1$.
Une semaine avant le DM, en cours nous avons vu trois fois la même méthode dans des circonstances variées. Celle-ci se résume ainsi : je calcule $u_{n+1} - u_n$ et j'en étudie le signe, en fait je regarde à partir de quel rang le signe va être constant. Pour conclure : suivant le signe, la suite peut être croissante (strictement ou pas) ou décroissante (strictement ou pas). Techniquement elle peut être aussi constante mais ça n'était pas pertinent pour l'exercice et n'avait pas été vu en classe au moment d'effectuer la recherche.
Beaucoup d'élèves ont calculé les premiers termes des suites et ont conclu en observant l'évolution. Cette approche est anecdotique : elle est locale, elle marche à un moment mais on ne sait absolument pas ce qui se passe en dehors des valeurs observées, donc elle n'a aucune valeur de preuve.
Essayer d'utiliser des méthodes plus simples que celles vue en classe est risqué.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = ((n+1)^3 - 2(n+1)^2 + n - 1) - (n^3 - 2n^2 + n - 1)$
A ce stade deux difficultés potentielles rencontrées par les élèves :

- l'oubli de la deuxième parenthèse : quand on veut retirer le résultat d'une somme algébrique, il faut protéger la somme à l'aide de parenthèses.
- Les puissances de $(n+1)$, beaucoup ont encore des problèmes sur les calculs littéraux, et sur les identités remarquables… en spé Maths, ça ne passe plus, donc si c'est votre cas, il est temps d'apprendre vos formules et d'être sûr de bien savoir les appliquer. Du coup $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ et $(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2$ $= (n+1)(n^2 + 2n + 1) = n^3 + 2n^2 + n + 1 + n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$u_{n+1} - u_n = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2(n^2 + 2n + 1) + n - 1) - (n^3 - 2n^2 + n - 1)$
$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 4n - 2 + n - 1 - n^3 + 2n^2 - n + 1 = 3n^2 - n$
A ce stade on veut trouver le signe d'un polynôme du second degré en n, donc je pourrais reconnaitre $an^2 + bn + c$ avec … et faire un tableau de signe comme vu au premier chapitre.
Plus simple ici : factoriser
$u_{n+1} - u_n = n(3n - 1)$
On pourrait faire un tableau de signe, mais ici, plus simplement on peut observer que n et $3n - 1$ sont tous deux strictement positifs à partir de $n = 1$ donc leur produit le sera aussi et donc (u_n) strictement croissante à partir de $n = 1$.
Remarque : en calculant les premières valeurs, on remarque que $u_0 = u_1 = -1$ et donc on peut dire que c'est constant puis croissant strictement, ou encore croissant (au sens large) à partir de $n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{3^{n+1}n}{(n+1)n} - \frac{3^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3^n \times 3 \times n - 3^n(n+1)}{(n+1)n} = \frac{3^n(3n-(n+1))}{(n+1)n} = \frac{3^n(2n-1)}{(n+1)n}$
A partir de $n = 1$ on aura $3^n > 1$, $(2n-1) > 0$, $(n+1) > 0$ et $n > 0$ donc $\frac{3^n(2n-1)}{(n+1)n} > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.
Remarque : s'il n'est pas clair pour vous qu'à partir de $n = 1$ on aura $3^n > 1$, $(2n-1) > 0$, $(n+1) > 0$ vous pouvez creuser le signe de chacun des facteurs et regrouper ça dans un tableau de signe.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $w_{n+1} - w_n = (w_n^2 + 3w_n + 4) - w_n = w_n^2 + 2w_n + 4$
La recherche du signe d'une telle expression peut sembler déconcertant vu que l'on ne connait pas la valeur de w_n.
En observant le fait que le premier terme est positif et qu'on passe d'un terme au suivant avec une addition d'éléments, la positivité semble être transmise d'un terme au suivant et donc on peut penser que tous les termes sont positifs et donc que la somme $w_n^2 + 2w_n + 4$ le sera aussi, intuitivement c'est clair mais à expliquer rigoureusement c'est pas évident surtout sans les outils de terminale.
$w_n^2 + 2w_n + 4$ n'est rien d'autre qu'un polynôme du second degré dont la variable est w_n et trouver le signe d'un tel polynôme est tout à fait dans nos cordes :
Version 1 : avec Δ
Je reconnais un polynôme de la forme $aw_n^2 + bw_n + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0$ donc le polynôme est toujours du signe de $a > 0$ ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 > 0$ donc $w_{n+1} - w_n > 0$ donc (w_n) croissante.
Version 2 : forme canonique :
Ainsi $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2}$ et $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{12}{4} = 3$ ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 = \left(w_n - (-1)\right)^2 + 3$ expression strictement positive en tant que somme d'un carré et de 3, ainsi ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 > 0$ donc $w_{n+1} - w_n > 0$ donc (w_n) croissante.

Exercice 2

1. a. x et y étant positifs, $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ existent et on aura $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2=x-2\sqrt{xy}+y$

Remarque : trop de réponses baclées/ pas assez justifiées de la part des élèves.

b. les carrés de réels étant toujours positifs ou nuls on aura : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+y\geq 0 \Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ CQFD

2. a. $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{1+4}{2}=2{,}5$ $\qquad v_1=\sqrt{u_0v_0}=\sqrt{1\times 4}=2$

$u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{2{,}5+2}{2}=2{,}25$ $\qquad v_2=\sqrt{u_1v_1}=\sqrt{2{,}5\times 2}=\sqrt{5}\approx 2{,}24$

b. en utilisant l'indication $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$ et $v_n=\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$

en supposant que les termes des deux suites sont positifs on peut utiliser la propriété du 1b avec $x=u_{n-1}$ et $y=v_{n-1}$ on aura $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Leftrightarrow\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}\geq\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}\Leftrightarrow u_n\geq v_n$

ainsi $\forall n\geq 1$ on aura $u_n\geq v_n$ $\qquad$ et donc $\forall n>1$ on aura $u_n\geq v_n$

c. étudions le signe de $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}$ or je sais que si $n>1$ j'ai $u_n\geq v_n$ et donc $0\geq v_n-u_n$

Donc $\forall n>1$, $u_{n+1}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}\leq 0$ donc (u_n) est croissante à partir de $n=2$. Or moi je veux avoir à partir du rang 1. Que se passe-t-il entre les rangs 1 et 2, d'après la question 1a , $u_1>u_2$

donc elle est croissante à partir de $n=1$.

étudions le signe de $v_{n+1}-v_n$

$$v_{n+1}-v_n=\sqrt{u_nv_n}-v_n=\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}-\sqrt{v_n}\sqrt{v_n}=\sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)$$

Le signe de $\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}$ n'est pas immédiat, ça doit être proprement justifié :

Avec le cours de 2$^{\text{nde}}$, on sait que la fonction racine est croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve l'ordre sur cet intervalle et donc en supposant que les termes des deux suites sont positifs on aura d'après la question 2b :

$\forall n>1$ on aura $u_n\geq v_n\geq 0$ et donc $\sqrt{u_n}\geq\sqrt{v_n}\geq\sqrt{0}$ et donc $\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\geq 0$ et comme $\sqrt{v_n}\geq 0$ on aura : $\sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)\geq 0$ et donc $v_{n+1}-v_n\geq 0$

donc (v_n) croissante à partir de $n=2$, or d'après 1b on sait que $v_1<v_2$

donc la croissance est vraie à partir de $n=1$

remarque : pour cette question il a fallu recoller les morceaux : on a généralisé à partir de $n=2$ (on ne pouvait pas faire mieux avec la propriété du 2b) puis on a rajouté à la main la pièce manquante en observant ce qui se passait entre les rangs 1 et 2.

Corrigé du devoir maison sur les suites (ce qui était attendu sur vos copies)

Exercice 1

1. Recherche des variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 - 2n^2 + n - 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = ((n+1)^3 - 2(n+1)^2 + n - 1) - (n^3 - 2n^2 + n - 1)$
$u_{n+1} - u_n = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2(n^2 + 2n + 1) + n - 1) - (n^3 - 2n^2 + n - 1)$
$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 4n - 2 + n - 1 - n^3 + 2n^2 - n + 1 = 3n^2 - n \ = n(3n - 1)$
On pourrait faire un tableau de signe, mais ici, plus simplement on peut observer que n et $3n - 1$ sont tous deux strictement positifs à partir de $n = 1$ donc leur produit le sera aussi et donc (u_n) strictement croissante à partir de $n = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{3^{n+1}n}{(n+1)n} - \frac{3^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3^n \times 3 \times n - 3^n(n+1)}{(n+1)n} = \frac{3^n(3n-(n+1))}{(n+1)n} = \frac{3^n(2n-1)}{(n+1)n}$
A partir de $n = 1$ on aura $3^n > 1$, $(2n - 1) > 0$, $(n + 1) > 0$ et $n > 0$ donc $\frac{3^n(2n-1)}{(n+1)n} > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $w_{n+1} - w_n = (w_n^2 + 3w_n + 4) - w_n = w_n^2 + 2w_n + 4$
Je reconnais un polynôme de la forme $aw_n^2 + bw_n + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$
Version 1 : avec Δ
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0$ donc le polynôme est toujours du signe de $a > 0$ ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 > 0$ donc $w_{n+1} - w_n > 0$ donc (w_n) croissante.
Version 2 : forme canonique
Ainsi $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2}$ et $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{12}{4} = 3$ ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 = \left(w_n - (-1)\right)^2 + 3$ expression strictement positive en tant que somme d'un carré et de 3, ainsi ainsi $w_n^2 + 2w_n + 4 > 0$ donc $w_{n+1} - w_n > 0$ donc (w_n) croissante.

Exercice 2

1. a. x et y étant positifs, $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ existent et on aura $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$
b. les carrés de réels étant toujours positifs ou nuls on aura : $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ CQFD

2. a. $u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{1+4}{2} = 2{,}5$ $\qquad v_1 = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{1 \times 4} = 2$
$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{2{,}5+2}{2} = 2{,}25$ $\qquad v_2 = \sqrt{u_1 v_1} = \sqrt{2{,}5 \times 2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$
b. en utilisant l'indication $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$ et $v_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$
En supposant que les termes des deux suites sont positifs on peut utiliser la propriété du 1b avec :
$x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$ on aura $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} \geq \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \Leftrightarrow u_n \geq v_n$
ainsi $\forall n \geq 1$ on aura $u_n \geq v_n$ et donc $\forall n > 1$ on aura $u_n \geq v_n$
c. étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$
$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{2}$ or je sais que si $n > 1$ j'ai $u_n \geq v_n$ et donc $0 \geq v_n - u_n$
Donc $\forall n > 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} \leq 0$ donc (u_n) est croissante à partir de $n = 2$. Or moi je veux avoir à partir du rang 1. Que se passe-t-il entre les rangs 1 et 2, d'après la question 1a , $u_1 > u_2$
donc elle est croissante à partir de $n = 1$.

étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$
$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} - \sqrt{v_n}\sqrt{v_n} = \sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)$
Le signe de $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}$ n'est pas immédiat, ça doit être proprement justifié :
Avec le cours de 2$^{\text{nde}}$, on sait que la fonction racine est croissante sur $[0; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre sur cet intervalle et donc en supposant que les termes des deux suites sont positifs on aura d'après la question 2b :
$\forall n > 1$ on aura $u_n \geq v_n \geq 0$ et donc $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{v_n} \geq \sqrt{0}$ et donc $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \geq 0$ et comme $\sqrt{v_n} \geq 0$ on aura :
$\sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right) \geq 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$
donc (v_n) croissante à partir de $n = 2$, or d'après 1b on sait que $v_1 < v_2$
donc la croissance est vraie à partir de $n = 1$