SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

Partie 1 : Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.
Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :
$u_0 = 3, \quad u_1 = 8, \quad u_2 = 13, \quad u_3 = 18.$
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Définition 1 : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Remarque :
La raison peut être un nombre négatif. On peut par exemple ajouter -2.

Méthode 1 : Démontrer qu'une suite est arithmétique
a) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
b) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

Propriété 1 : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$

Démonstration au programme : voir cahier/classeur

Méthode 2 : Déterminer une expression en fonction de n d'une suite arithmétique
a) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$
b) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Méthode 3 : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique
Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
a) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
b) Exprimer u_n en fonction de n.

2) Sens de variation

Propriété 2 : (u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :

Méthode 4 : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Étudier les variations des suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par :

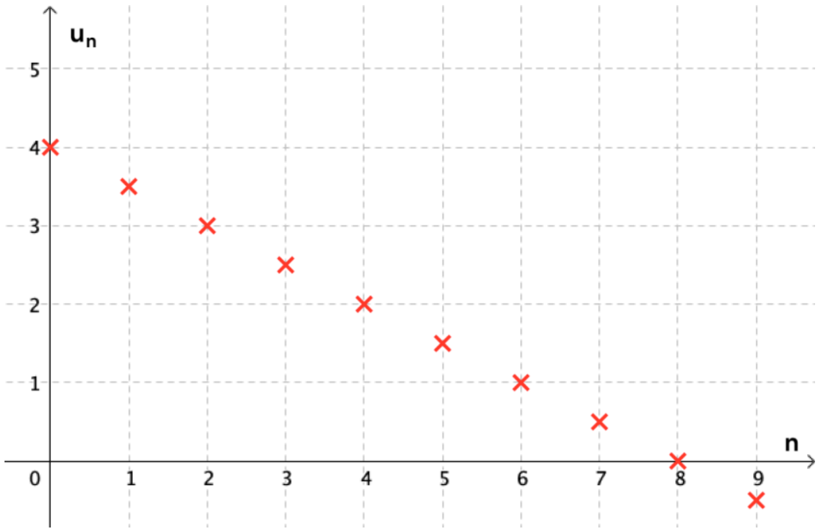
$a)\ u_n = 3 + 5n$

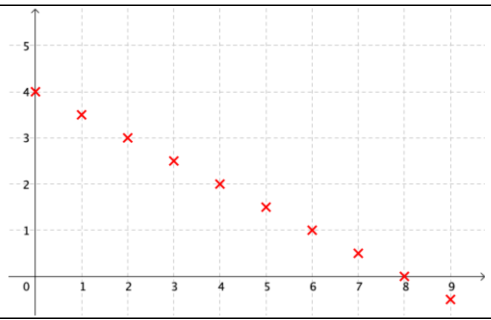
b) $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - 4 \end{cases}$

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple : $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0,5n$
Sens De variation	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. La croissance est linéaire.	

Partie 2 : Suites géométriques

1) Définition

Exemple :
Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.
Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :
$u_0 = 5,\qquad u_1 = 10,\qquad u_2 = 20,\qquad u_3 = 40.$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Définition 2 : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode 5 : Démontrer qu'une suite est géométrique
La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

Exemple concret :
On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.
Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$
$u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$

De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

Propriété 3 : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration au programme :

Méthode 6 : Déterminer une expression en fonction de n d'une suite géométrique
a) Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$
b) Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Méthode 7 : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique
Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
a) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
b) En déduire une expression de la suite en fonction de n.

2) Sens de variation

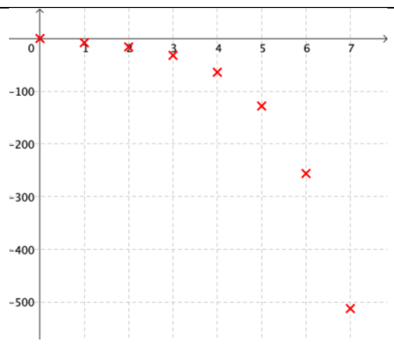
Propriété 4 : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
Pour $u_0 < 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

Remarques :
- Si $q = 1$, la suite est constante.
- Si $q \leq 0$, la suite n'est pas monotone.

Méthode 8 : Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique
Déterminer le sens de variation des suites géométriques (u_n) et (v_n) définies par :

a) $u_n = -4 \times 2^n$ b) $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n \end{cases}$

RÉSUMÉ	(u_n) une suite géométrique de raison q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Sens de variation	Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarques : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. La croissance est exponentielle.	

Partie 3 : Sommes de termes consécutifs

1) Cas des suites arithmétiques

Propriété 5 : n est un entier naturel non nul, alors on a : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

Méthode 9 : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Calculer les sommes suivantes :

$S_1=1+2+3+\cdots+348$

$S_2=15+16+17+\cdots+88$

$S_3=33+36+39+\cdots+267$

2) Cas des suites géométriques

Propriété 6 : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

Méthode 10 : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Calculer les sommes suivantes :

$S_1=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^7$ $\qquad$ $S_2=3+3^2+3^3+\cdots+3^{13}$

Méthode 11 : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique (problème)

Un entrepreneur investit au départ 20 000 €. Puis, chaque mois, il investit un montant supplémentaire diminuée de 30 % par rapport au mois précédent.

On note u_n le montant investi au mois n. On considère alors que $u_0=20\,000$.

Calculer le montant total investi la première année (12 mois).

3) Algorithme de somme

Méthode 12 : Appliquer l'algorithme de somme

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1}=0{,}2u_n+1 \end{cases}$

Calculer à l'aide d'un programme la somme $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$.