

## Devoir Maison : suites et intérêts

Yann emprunte à sa banque 2000 euros au taux annuel de 2%. Elle va rembourser en 2 fois. Une première fois 1000 euros au bout d'un an. Une seconde fois  $x$  euros deux ans après le début du prêt.

- 1.a. Expliquer pourquoi Yann doit encore 1040 euros après son premier remboursement.
- 1.b. Combien vaut  $x$  ?

Samia emprunte à sa banque 1000 euros au taux annuel de 2%. Elle va rembourser en 2 fois. Une première fois  $s$  euros au bout d'un an. Une seconde fois  $s$  euros deux ans après le début du prêt.

- 1.c. Montrer que  $s = 1\,040,40 - 1,02s$ . Combien vaut  $s$  ?

**L'amortissement d'un emprunt** est la partie du capital qui est remboursée à chaque échéance périodique (par exemple chaque mois).

Ce paiement se fait en même temps que celui des intérêts dus pour la même période. Le versement total (amortissement + intérêts) à chaque échéance est dénommé, selon sa périodicité, **la mensualité, annuité...**

On considère un prêt, d'un montant (capital) égal à  $C$ , au taux mensuel égal à  $t$ . Chaque mois, l'emprunteur rembourse le même montant, égal à  $M$ . Après  $n$  mensualités, le prêt est supposé totalement remboursé.

On appelle  $u_i$  le capital restant dû après  $i$  mensualités. On a donc  $u_0 = C$  et  $u_n = 0$ .

2.a. Montrer que  $u_1 = C(1+t) - M$ .

2.b. Montrer que  $u_2 = C(1+t)^2 - M(1+t) - M$ .

2.c. Montrer que  $u_3 = C(1+t)^3 - M(1+t)^2 - M(1+t) - M$ .

2.d. On admet que, pour tout entier  $i$  entre 1 et  $n$ , on a :

$$u_i = C(1+t)^i - M(1+t)^{i-1} - M(1+t)^{i-2} - \dots - M(1+t)^2 - M(1+t) - M$$

Expliquer pourquoi on a :  $u_i = C(1+t)^i - M \frac{(1+t)^i - 1}{t}$

Montrer que :  $M = C \frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$

3.a. Pour acheter sa première maison Jimmy a emprunté sur vingt ans 120 000€ au taux de 0,3% par mois. En 2024 c'est extrêmement avantageux. Il rembourse en 240 mensualités égales à  $M$ . A l'aide d'un tableur créez un tableau affichant la valeur de  $M$  quand on donne une valeur pour  $t$ , une pour  $n$  et une pour  $C$ . (voir tableau à la question 3.e.)

Combien vaut  $M$  (arrondie à 0,01 euro) ?

Par la suite, il est conseillé d'utiliser la valeur exacte de  $M$  dans les calculs pour éviter de propager des erreurs dues aux approximations.

3.b. Quel est le coût total du crédit ?

3.c. Quel est le capital restant dû au bout d'un an (12 mensualités). Même question pour dix ans (120 mensualités) ?

3.d. Quel est le montant total des intérêts versés à la banque au bout de la première année ? Le comparer à celui des intérêts versés au cours de la seconde année.

3.e. A l'aide d'un tableau (Excel, Google sheets, Libre Office Calc, ...) créer un tableau permettant de donner pour chaque année (jusqu'à la fin du prêt) : l'échéance (numéro du mois), le capital restant dû, intérêts cumulés, les intérêts et le capital amorti. Ça donne un tableau commençant comme suit :

				échéance	capital restant dû	intérêts cumu	intérêts	capital amorti
taux	qte emprunté	nbr mois	mensualité	0	120000	0	0	0
0,003	120000	240	702,13376	1	119657,8662	360	360	342,1337602
				2	119314,7061	718,973599	358,97	343,1601615
				3	118970,5164	1076,91772	357,94	344,189642

3.f. A l'aide de Python faire la même chose. Le tableau comme le programme seront à mettre dans une archive et à envoyer via Discord ou à mon adresse mail [julien.kergot@gmail.com](mailto:julien.kergot@gmail.com)

4. Noémie a emprunté sur deux ans  $C$  euros au taux de 0,1% par mois. Elle rembourse en 24 mensualités égales à 50 euros chacune. Combien vaut  $C$  ?

### Ressources :

Pour la partie tableur vous pouvez vous inspirer des tutoriels suivants :

[https://www.youtube.com/watch?v=bc\\_V0jn0Huc](https://www.youtube.com/watch?v=bc_V0jn0Huc)

<https://www.youtube.com/watch?v=opz44pbpDMo>

il est aussi à noter que chaque mois

- l'intérêt sera le capital restant dû du mois précédent multiplié par le tau d'intérêt.
- le capital amorti sera la mensualité amputée des intérêts du mois

### Pour python :

Pour faire une puissance on utilise le symbole \*\*, par exemple  $2^5$  s'écrira  $2**5$

```

2  #compléter les lignes 7,15,17,18,19 et 20
3  rate = 0.003                #taux
4  loan = 120000               #quantité d'argent empruntée
5  duration = 240              #durée en mois de l'emprunt
6
7  monthly =                   #mettre la formule pour calculer les mensualités
8
9  print ("avec un taux de {}% par mois pour rembourser {}".format(rate*100,loan))
10 print ("il faudra {} mensualités de {} euros".format(duration,int(monthly)))
11
12 still= loan                  #argent restant à payer
13 cumulateInterest = 0        #intérêt cumulés
14 n=0                          #échéance
15 while n< :
16     n+=1
17     interest =                #intérêt du mois
18     still =
19     cumulateInterest+=
20     amortized =              #capital amorti
21
22     print("mois n°{} : capital restant={}€, intérêts cumulés={}€, \
23           intérêts={}€, capital Amorti={}".format\
24           (n,int(still),int(cumulateInterest),int(interest),int(amortized)))

```

Un fichier à compléter est disponible sur le site.