GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Partie 1 : Définition et représentation graphique

1) Définition d'une suite

Exemple d'introduction :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …
On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1$: le premier terme de la suite
$u_1 = 3$: le 2e terme
$u_2 = 5$: le 3e terme
$u_3 = 7$ …
On a ainsi défini une suite numérique.

Définitions :
- Une **suite** (u_n) est une liste ordonnée de nombres telle qu'à tout entier n, on associe un nombre réel noté u_n.
- u_0, u_1, u_2, … sont appelés les **termes** de la suite.
- n est appelé le **rang**.

Remarque :
Une suite peut être associée à une fonction définie par $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

2) Suites définies en fonction de n (forme explicite)

Méthode : Calculer des termes d'une suite définies en fonction de n

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :
a) $u_n = 2n$ b) $v_n = 3n^2 - 1$

Correction

a) On considère : $u_n = 2n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :

$u_0 = 2 \times 0 = 0$ ← On remplace n par 0

$u_1 = 2 \times 1 = 2$ ← On remplace n par 1

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

b) On considère : $v_n = 3n^2 - 1$.
Les premiers termes de cette suite sont donc :

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

3) Suites définies par récurrence

Chaque terme de la suite s'obtient à partir du terme précédent.
On exprime en général u_{n+1} en fonction de u_n. En effet, les termes u_n et u_{n+1} se suivent.
Par exemple, u_5 et $u_{5+1} = u_6$ se suivent.

Méthode : Calculer des termes d'une suite définie par récurrence (1)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

b) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 6 \end{cases}$

Correction

a) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$
et pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 3u_n$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$u_0 = 5$

$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$ On remplace u_0 par sa valeur.

$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$

…………………………………………………………………………….

2) La suite (v_n) est définie par $v_0 = 3$
et pour tout entier n, on a $v_{n+1} = 4v_n - 6$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Méthode : Calculer des termes d'une suite définie par récurrence (2)

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + n \end{cases}$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite.

Correction

Dans cet exercice, le premier terme est w_1.
La suite (w_n) est définie par $w_1 = 5$ et pour tout entier n, on a $w_{n+1} = w_n + n$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$w_2 = w_{1+1} = w_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ $\leftarrow$ n est égal à 1
$w_3 = w_{2+1} = w_2 + 2 = 2 + 2 = 4$ $\leftarrow$ n est égal à 2
$w_4 = w_{3+1} = w_3 + 3 = 4 + 3 = 7$ $\leftarrow$ n est égal à 3

Remarque : Contrairement à une suite définie en fonction de n, il n'est par exemple pas possible de calculer u_{13} sans connaître u_{12} pour une suite définie par récurrence.
Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

Cependant, il est possible d'écrire un algorithme avec Python calculant les termes successifs d'une suite définie par récurrence.

Méthode : Calculer un terme à l'aide d'un algorithme

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$
Écrire un programme Python permettant de calculer les termes de la suite (u_n).
Afficher le terme u_{13}.

Correction

```
def suite(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return(u)
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

4) Représentation graphique d'une suite

Méthode : Représenter graphiquement une suite

Pour tout entier n, on donne : $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.

Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n).

Correction

On construit un tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

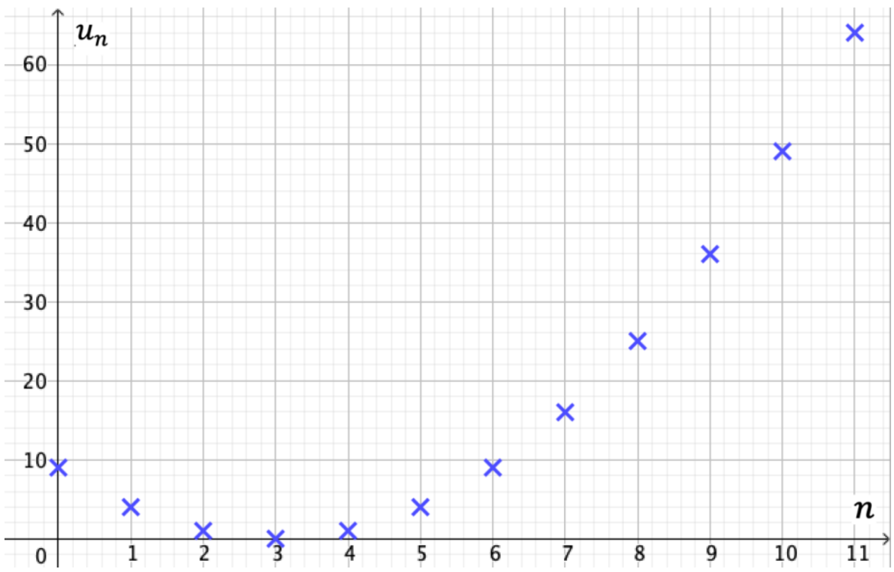
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									

Dans un repère du plan, on représente la suite (u_n) par un nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Partie 2 : Sens de variation d'une suite numérique

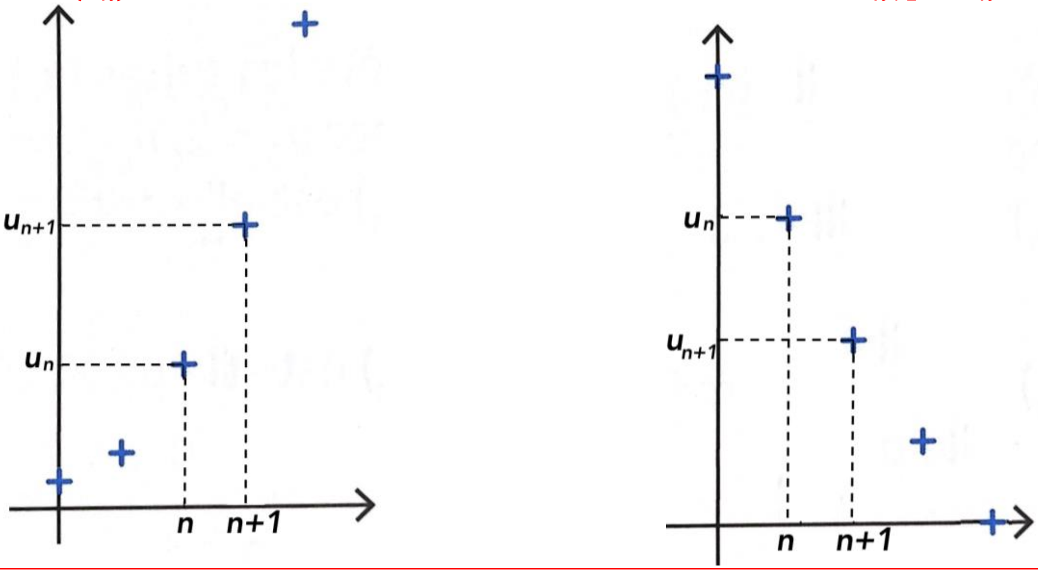
Exemple :

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



On observe graphiquement que cette suite est croissante à partir du rang $n = 3$.

Définitions :
- La suite (u_n) est **croissante à partir d'un certain rang** signifie que $u_{n+1} \geq u_n$ à partir de ce rang.
- La suite (u_n) est **décroissante à partir d'un certain rang** signifie que $u_{n+1} \leq u_n$ à partir de ce rang.



Remarques :
- Pour une suite constante, on a $u_{n+1} = u_n$
- Lorsqu'on a $u_{n+1} > u_n$, on dit que (u_n) est strictement croissante.
- Lorsqu'on a $u_{n+1} < u_n$, on dit que (u_n) est strictement décroissante.

Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite

a) Pour tout entier n, on donne : $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang à déterminer.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

On calcule $u_{n+1} - u_n$:
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$,
la suite est décroissante.

Correction
a) - On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - (n^2 - 4n + 4)$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4 = 2n - 3$$

- On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.
Soit $n \geq 2$, car n est entier.

- On a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$, pour $n \geq 2$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

b) On commence par calculer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

Or $0 \leq n \leq n+2$, donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc $v_{n+1} < v_n$ (car $v_n > 0$).
On en déduit que (v_n) est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

a) On considère la fonction associée f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

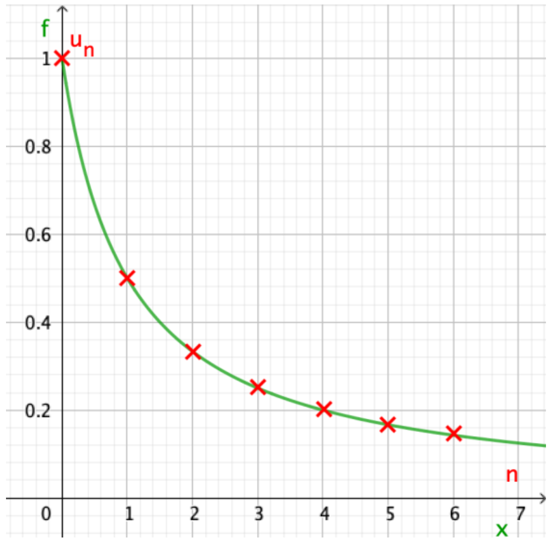
Correction

a) Étudions les variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$x \to x+1$ est affine de coefficient directeur 1 donc elle conserver l'ordre (croissante) sur $[0\ ;\ +\infty[$, de plus ses valeurs sont dans $[0; +\infty[$.

La fonction inverse change l'ordre (décroissante) sur $]0; +\infty[$ donc sur $[1; +\infty[$.

f est une fonction qui équivaut aux deux transformation précédentes prises de manière consécutives, elle va changer l'ordre sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sera donc décroissante sur cet intervalle.



b) On a : $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

f est strictement décroissante pour tout x réel positif, donc :

f est strictement décroissante pour tout x entier positif, donc :

(u_n) est strictement décroissante pour tout n entier positif.

En effet, f et (u_n) ont la même expression et sont égales pour des valeurs entières positives.

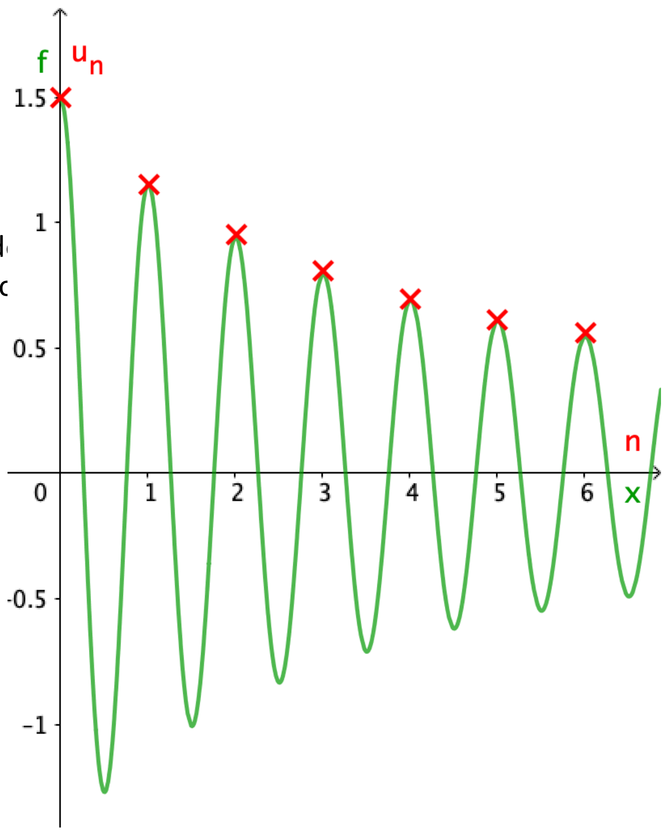
⚠ Remarque :

En général, si la suite est décroissante, cela ne

que la fonction est décroissante.

La représentation suivante montre une suite d

alors que la fonction f associée n'est pas décrc



Partie 3 : Notion de limite d'une suite

Exemple :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne : $u_n = \frac{2n+1}{n}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite de plus en plus grands :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n									

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.
On dit que la suite (u_n) converge vers 2.

Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$. On lit : la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 2.

Définitions :
- Une **suite convergente** possède des termes qui se rapprochent d'une valeur, appelée limite, lorsque n devient de plus en plus grand.
- Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Méthode : Conjecturer la limite d'une suite

1) Pour tout entier n, on donne : $u_n = n^2 + 1$.
Calculer u_0, u_1, u_2, u_{10} et u_{100}. La suite (u_n) semble-t-elle être convergente ou divergente ?

2) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (-1)^n v_n \end{cases}$.
Calculer des termes de la suite. La suite (v_n) semble-t-elle être convergente ou divergente ?

Correction

1) $u_0 =$ ....

....
....
....
....

....
....
....

2) ....
....
....
....
....

....
....
....

Méthode : Déterminer un seuil à l'aide d'un algorithme

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1 \end{cases}$ Écrire un programme Python permettant de déterminer le rang de la suite à partir duquel les termes sont supérieurs à 8.

Correction

```
def seuil():
    n=0
    u=2
    while u<=8:
        n=n+1
        u=0.9*u+1
    return(n)
```

....
....
....
....

```
>>> seuil()
14
```

Les termes de la suite sont supérieurs à 8 à partir de u_{14}.