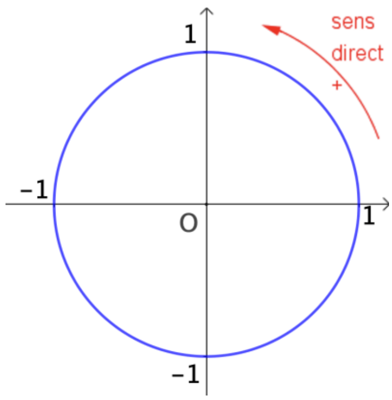
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Partie 1 : Cercle trigonométrique et radian

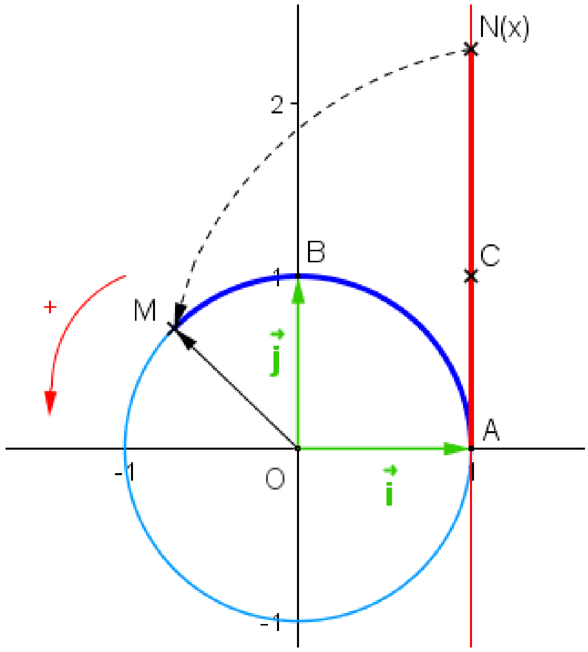
1) Le cercle trigonométrique



Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique



Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A\,;\,\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

On a ainsi défini un repérage sur le cercle.

3) Le radian

Propriété :
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi\times 1 = 2\pi$.

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

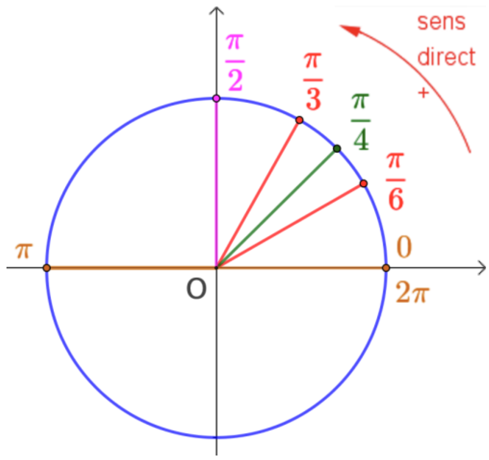
Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode 1 : Passer des degrés aux radians et réciproquement

1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

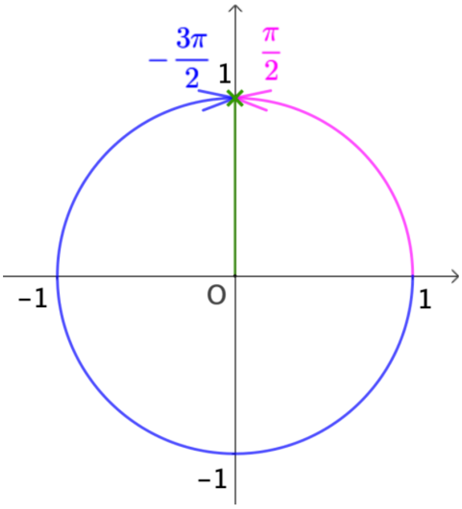
Partie 2 : Mesure d'un angle orienté



1) Lire sur le cercle trigonométrique

Exemple :

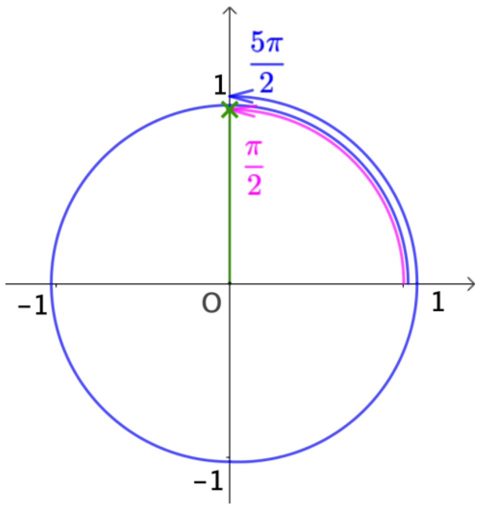
On a représenté ci-contre des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique.



Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droit, soit 90°.

Mais il est possible de faire la lecture dans l'autre sens (le sens négatif ou indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$.

Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.



Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.

Cela qui donne par exemple $\frac{5\pi}{2}$ en effectuant un tour supplémentaire.

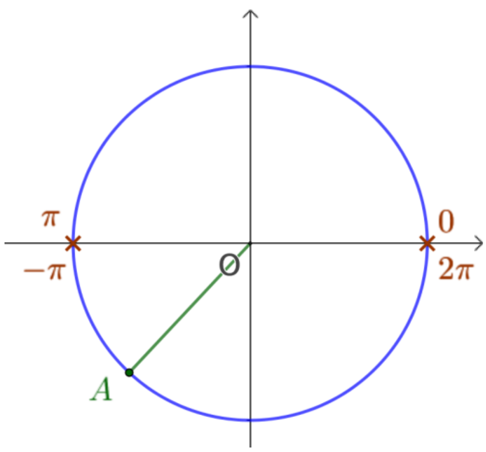
Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.

Méthode 2 : Lire une valeur sur le cercle trigonométrique

Lire sur le cercle trigonométrique le nombre associé au point A (pour info le point est sur la bissectrice deux des angles formé entre les deux axes) :

a) Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

b) Sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Méthode 3 : Placer un point sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique :

a) Le point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$.

b) Le point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$.

c) Le point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$.

d) Le point D associé au nombre $-\frac{9\pi}{2}$.

2) Mesure principale d'un angle orienté (non exigible)

On a vu qu'un point sur le cercle trigonométrique peut être associé à plusieurs valeurs.

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exemple :

Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$; … soit : $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$; …

$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car c'est la seule comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

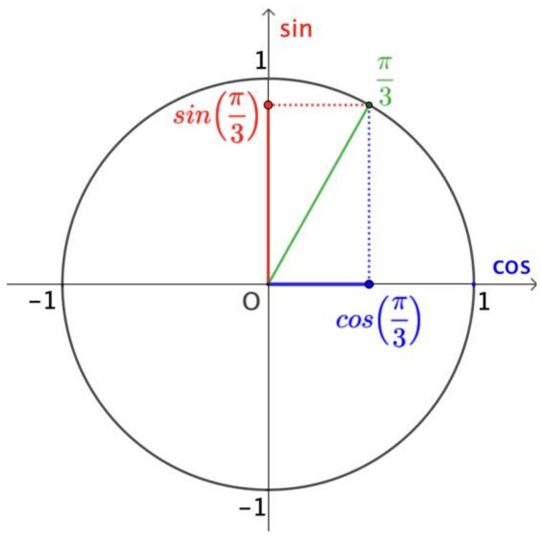
Méthode 4 : Donner la mesure principale d'un angle (non exigible)

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

Partie 3 : Cosinus et sinus d'un nombre réel

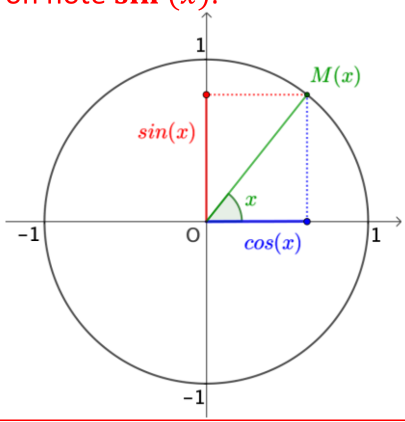
1) Définitions et propriétés

Exemple :



A l'aide du cercle trigonométrique, il est possible de lire le cosinus et le sinus d'un nombre.
Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.

Définitions : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note $\mathbf{cos}(x)$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note $\mathbf{sin}\ (x)$.



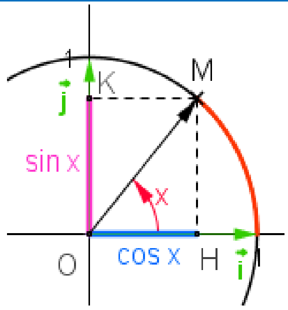
Propriétés :
1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Remarque : $(\sin(x))^2$, par exemple, se note $\sin^2(x)$.

Démonstrations :

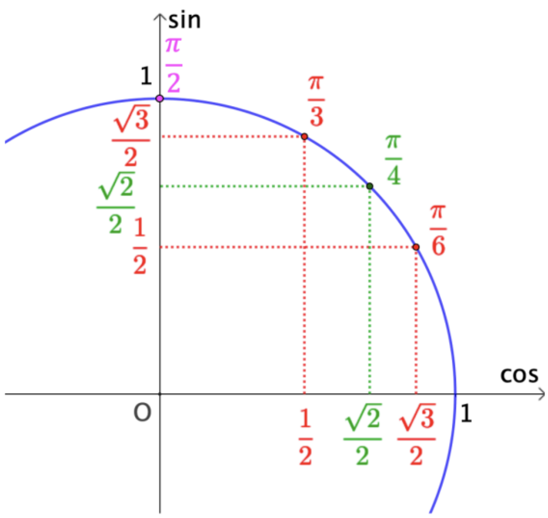
1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2 = 1$.



2) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstrations au programme :

Méthode 5 : Lire sur le cercle trigonométrique

Déterminer la valeur exacte de : a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ b) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Méthode 6 : Résoudre une équation trigonométrique

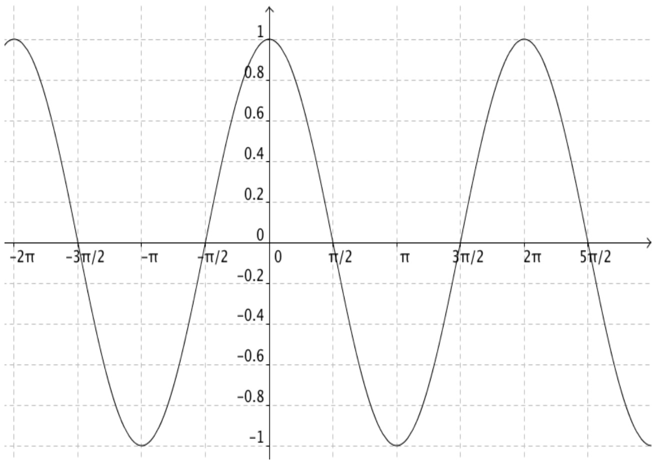
Dans chaque cas, déterminer la ou les valeurs de x, tels que :

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, avec $x \in [0\,;2\pi]$ b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$, avec $x \in [-\pi\,;\pi]$.

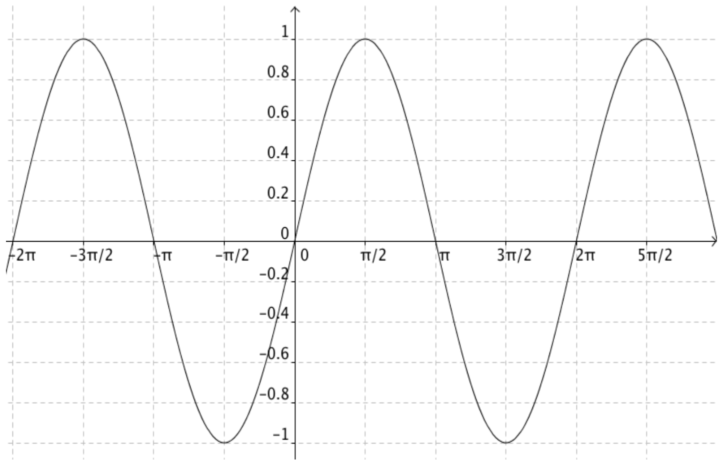
Partie 4 : Fonctions cosinus et sinus

1) Définitions et représentations graphiques

Définitions :
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



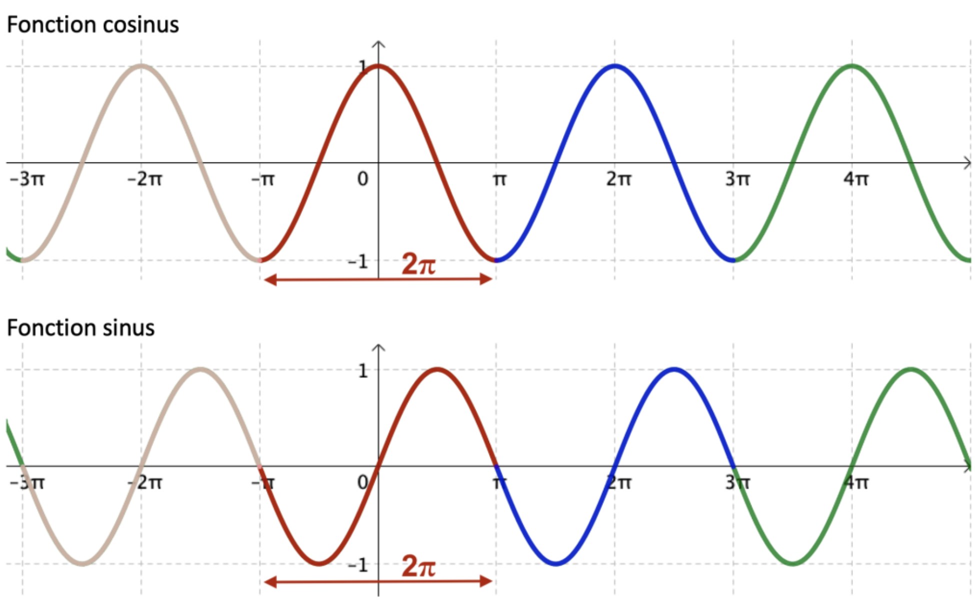
Fonction sinus

2) Périodicité

Propriétés : 1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
2) $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π**.
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.



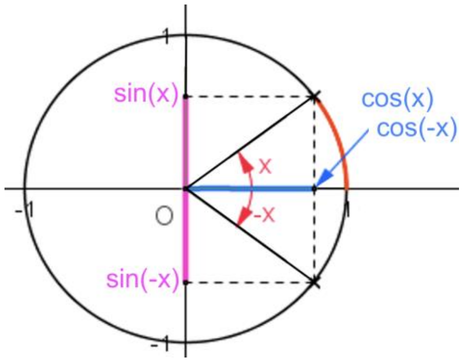
3) Parité

Définitions : - Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarques :
- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$. - Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés :
- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

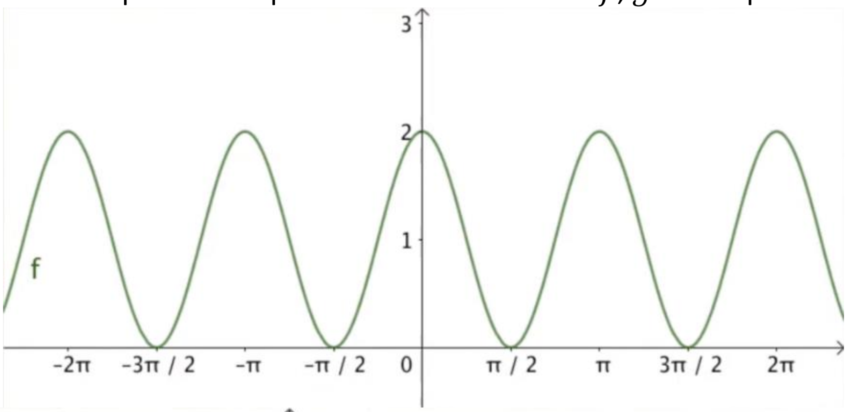
Démonstration :
Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

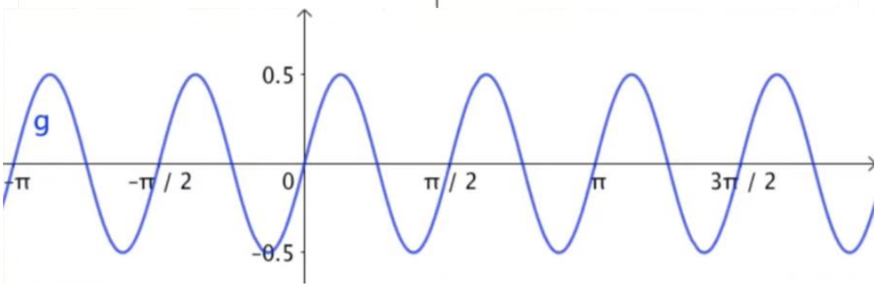


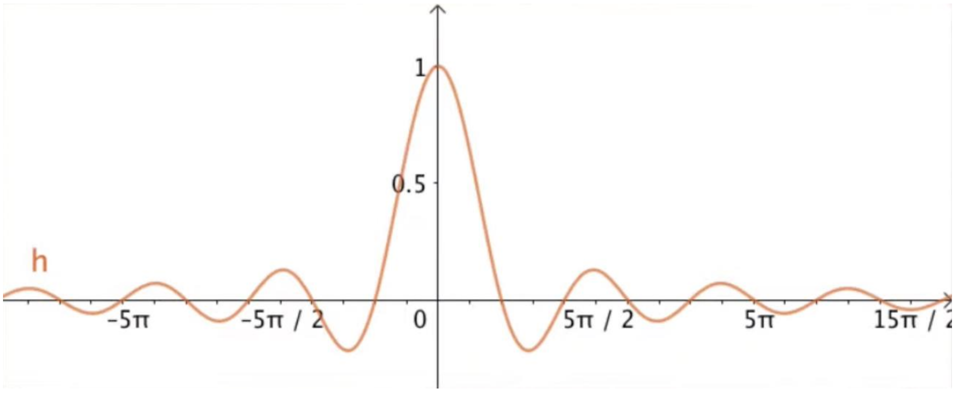
Remarques :
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode 7 : Reconnaître graphiquement la parité et la périodicité d'une fonction

Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f, g et h représentées ci-dessous :







Méthode 8 : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Méthode 9 : Compléter un graphique par parité et périodicité

Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.