

**EXERCICE 1** Compléter : la valeur absolue est la partie positive ou nulle de l'expression qu'elle contient :

$$\begin{array}{llll}
 |5| = \dots\dots & |0| = \dots\dots & |7| = \dots\dots & |-7| = \dots\dots \\
 |-1| = \dots\dots & |-1000000| = \dots\dots & |1-9| = \dots\dots & |12-7| = \dots\dots \\
 |9+5| = \dots\dots & |9+|5|| = \dots\dots & |-7+|12|| = \dots\dots & |-7+12| = \dots\dots \\
 |\pi-4| = \dots\dots & |\sqrt{2}-1| = \dots\dots & |10^{-9}| = \dots\dots & |-10^9| = \dots\dots
 \end{array}$$

**EXERCICE 2** En utilisant cette propriété, résoudre les équations suivantes comme dans l'exemple :

a.  $|x+3|=8$  soit  $x+3=8 \Leftrightarrow x=8-3=5$ , soit  $x+3=-8 \Leftrightarrow x=-8-3=-11$   $S=\{-11;5\}$

b.  $|x-5|=3$  soit

c.  $|12-x|=9$  soit

d.  $|2x-5|=3$  soit

**EXERCICE 3** Donner l'intervalle qui correspond à chaque inégalité (on représentera cet intervalle sur l'axe gradué).

	INÉGALITE	INTERVALLE	AXE GRADUE
a.	$ x-7  \leq 1$	$\Leftrightarrow x \in$	
b.	$ x-1  < 7$	$\Leftrightarrow x \in$	
c.	$ x-3  < 2$	$\Leftrightarrow x \in$	
d.	$ x-3  \geq 2$	$\Leftrightarrow x \in$	
e.	$ x-4  \leq 5$	$\Leftrightarrow x \in$	
f.	$ x-12  > 7$	$\Leftrightarrow x \in$	
g.	$ x+2  \leq 9$	$\Leftrightarrow x \in$	
h.	$ x+6  > 5$	$\Leftrightarrow x \in$	
i.	$ x-8,3  \leq 0,1$	$\Leftrightarrow x \in$	
j.	$ x-5\ 000  \geq 1\ 000$	$\Leftrightarrow x \in$	

**Définition**

**Ex 4B.1 :** Ecrire sans barre de valeurs absolues :  $|1-\sqrt{2}|$  ;  $|\sqrt{3}-2|$  ;  $|5\sqrt{2}-7|$

**Valeur absolue et distance**

**Ex 4B.2 :** Interpréter en termes de distances les réels suivants :

$$A = \left| x - \frac{7}{3} \right| \quad ; \quad B = \left| x + \frac{3}{4} \right| \quad ; \quad C = |-x-3| \quad ; \quad D = |-7+2x|$$

*conseil :* partir de la définition :  $|x-a| = d(x;a)$  ( distance de x à a )

**Ex 4B.3 :** Ecrire les réels suivants sans la notation valeur absolue :

$$E = |x+15| \quad ; \quad F = |2x+1| \quad ; \quad G = \left| \frac{4}{5} - x \right|$$

**Equations avec la valeur absolue**

**Ex 4B.4 :** Résoudre les équations suivantes

- |   |                |                         |
|---|----------------|-------------------------|
| a) $ x =7$                              | b) $ x-2 =0$   | c) $ 3x-1 =-1$          |
| d) $\left  \frac{3}{2} - x \right  = 4$ | e) $ x-2 =2-x$ | f) $\sqrt{(x+1)^2} = 2$ |
| g) $ 4x-1 = 2x+3 $                      |                |                         |

*conseil :* si l'équation ne comporte qu'une valeur absolue, il est préférable d'interpréter celle-ci en terme de distance sinon on utilise un tableau de valeurs absolues

**Valeurs absolues et intervalles**

**Ex 4B.5 :** Compléter le tableau suivant, selon le modèle :

valeur absolue	distance	inégalité	intervalle
$ x-1  \leq 3$	$d(x;1) \leq 3$	$-2 \leq x \leq 4$	$x \in [-2;4]$
$ x+3  \leq 2$			
	$d\left(x; \frac{1}{2}\right) < 2$		
		$-1 \leq x \leq 3$	
			$x \in ]0;5[$
$\left  x - \frac{2}{3} \right  \geq \frac{1}{3}$			

**Inéquations avec la valeur absolue**

**Ex 4B.6 :** Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution S sous forme d'intervalle

- |                             |                        |                            |
|-----------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $ x-2  \geq \frac{1}{2}$ | b) $1 \leq  x  \leq 2$ | c) $ x+2  \leq -1$         |
| d) $ -x+3  \geq 4$          | e) $ x-1  \geq -1$     | f) $ 2-3x  +  5-x  \geq 1$ |

*conseil :* utiliser le même qu'à l'exo4 !

**CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER****EXERCICE 1** Compléter :

$|5| = 5$

$|0| = 0$

$|7| = 7$

$|-7| = 7$

$|-1| = 1$

$|-1000000| = 1000000$

$|1-9| = |-8| = 8$

$|12-7| = |5| = 5$

$|9+5| = |14| = 14$

$|9+5| = 9+5 = 14$

$|-7+12| = 7+12 = 19$

$|-7+12| = |5| = 5$

$|\pi-4| = 4-\pi$

$|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

$|10^{-9}| = 10^{-9}$

$|-10^9| = 10^9$

**EXERCICE 2** En utilisant cette propriété, résoudre les équations suivantes comme dans l'exemple :


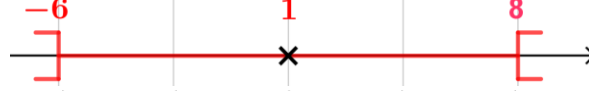
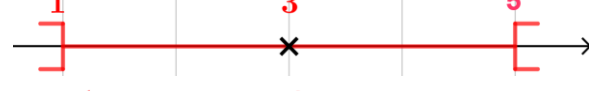



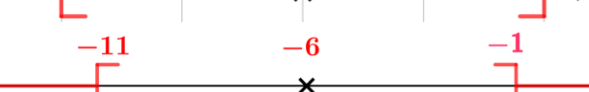

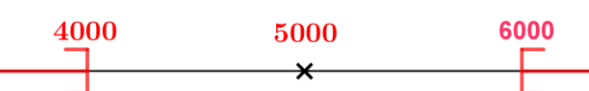
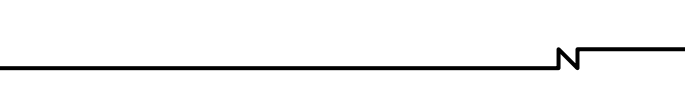
**a.**  $|x+3|=8$  soit  $x+3=8 \Leftrightarrow x=8-3=5$ , soit  $x+3=-8 \Leftrightarrow x=-8-3=-11$   $S=\{-11;5\}$

**b.**  $|x-5|=3$  soit  $x-5=3 \Leftrightarrow x=3+5=8$ , soit  $x-5=-3 \Leftrightarrow x=-3+5=2$   $S=\{2;8\}$

**c.**  $|12-x|=9$  soit  $12-x=9 \Leftrightarrow -x=9-12=-3 \Leftrightarrow x=3$ ,  
soit  $12-x=-9 \Leftrightarrow -x=-9-12=-21 \Leftrightarrow x=21$   $S=\{3;21\}$

**d.**  $|2x-5|=3$  soit  $2x-5=3 \Leftrightarrow 2x=3+5=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4$ ,  
soit  $2x-5=-3 \Leftrightarrow 2x=-3+5=2 \Leftrightarrow x=1$   $S=\{1;4\}$

**EXERCICE 3** Donner l'intervalle qui correspond à chaque inégalité

INEGALITE	INTERVALLE	AXE GRADUE
<b>a.</b> $ x-7  \leq 1$	$\Leftrightarrow x \in [6;8]$	
<b>b.</b> $ x-1  < 7$	$\Leftrightarrow x \in ]-6;8[$	
<b>c.</b> $ x-3  < 2$	$\Leftrightarrow x \in ]1;5[$	
<b>d.</b> $ x-3  \geq 2$	$\Leftrightarrow x \in ]-\infty;1] \cup [5;+\infty[$	
<b>e.</b> $ x-4  \leq 5$	$\Leftrightarrow x \in [-1;9]$	
<b>f.</b> $ x-12  > 7$	$\Leftrightarrow x \in ]-\infty;5[ \cup ]19;+\infty[$	
<b>g.</b> $ x+2  \leq 9$	$\Leftrightarrow x \in [-11;7]$	
<b>h.</b> $ x+6  > 5$	$\Leftrightarrow x \in ]-\infty;-11[ \cup ]-1;+\infty[$	
<b>i.</b> $ x-8,3  \leq 0,1$	$\Leftrightarrow x \in [8,2;8,4]$	
<b>j.</b> $ x-5000  \geq 1000$ $\Leftrightarrow x \in ]-\infty;4000] \cup [6000;+\infty[$		

## CORRIGE - Notre Dame de La Merci - Montpellier

**Ex 4B.1 :** Ecrire sans barre de valeurs absolues :

$$\begin{aligned} |1-\sqrt{2}| &= \sqrt{2}-1 & \text{car } 1-\sqrt{2} < 0 & & |\sqrt{3}-2| &= 2-\sqrt{3} & \text{car } \sqrt{3}-2 < 0 \\ |5\sqrt{2}-7| &= 5\sqrt{2}-7 & \text{car } 5\sqrt{2}-7 > 0 & & & & \end{aligned}$$

### Valeur absolue et distance

**Ex 4B.2 :** Interpréter en termes de distances les réels suivants :

$$\begin{aligned} A &= \left| x - \frac{7}{3} \right| = d\left(x; \frac{7}{3}\right) & B &= \left| x + \frac{3}{4} \right| = \left| x - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| = d\left(x; -\frac{3}{4}\right) \\ C &= |-x-3| = |-(x+3)| = |x+3| = d(x; -3) & D &= |-7+2x| = 2\left|x - \frac{7}{2}\right| = 2 \times d\left(x; \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

**Ex 4B.3 :** Ecrire les réels suivants sans la notation valeur absolue :

$$\begin{aligned} E = |x+15| &= \begin{cases} x+15 & \text{si } x \geq -15 \\ -x-15 & \text{si } x < -15 \end{cases} & F = |2x+1| &= \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ G = \left| \frac{4}{5} - x \right| &= \begin{cases} \frac{4}{5} - x & \text{si } x \leq \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} + x & \text{si } x > \frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

### Equations avec la valeur absolue

**Ex 4B.4 :** Résoudre les équations suivantes

- a)  $|x|=7 \Leftrightarrow d(x;0)=7$  donc  $x=7$  ou  $x=-7$   $S = \{-7;7\}$
- b)  $|x-2|=0 \Leftrightarrow d(x;2)=0$  donc  $x=0$   $S = \{0\}$
- c)  $|3x-1|=-1$  une valeur absolue ne peut jamais être négative  $S = \emptyset$
- d)  $\left|\frac{3}{2}-x\right|=4 \Leftrightarrow d\left(\frac{3}{2};x\right)=4$  donc  $x=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$  ou  $x=\frac{3}{2}-4=-\frac{5}{2}$   $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right\}$
- e)  $|x-2|=2-x$  on sait que  $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases}$
- Si  $x \geq 2$ , on obtient :  $x-2=2-x \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2$
- Si  $x < 2$ , on obtient :  $2-x=2-x$ , ce qui est toujours vrai. Ainsi :  $S = ]-\infty;2]$ .
- f)  $\sqrt{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow |x+1|=2 \Leftrightarrow d(x;-1)=2$
- donc  $x=-1+2=1$  ou  $x=-1-2=-3$   $S = \{-3;1\}$
- g)  $|4x-1|=|2x+3| \Leftrightarrow |4x-1|-|2x+3|=0$
- $4x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$  et  $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

les valeurs charnières sont :  $\frac{1}{4}$  et  $-\frac{3}{2}$  ainsi on dresse un tableau de valeurs absolues :

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$ 4x-1 $	$1-4x$	$1-4x$	$0$	$4x-1$
$ 2x+3 $	$-2x-3$	$0$	$2x+3$	$2x+3$
$ 4x-1 - 2x+3 $	$4-2x$	$-6x-2$	$2x-4$	

puis on résout chaque équation sur son intervalle de définition :

$$4-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-2}=2 \text{ or } 2 \notin \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[$$

$$-6x-2=0 \Leftrightarrow -6x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{1}{3} \in \left] -\frac{3}{2}; \frac{1}{4} \right[$$

$$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2 \text{ et } 2 \in \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$$

$$\text{Ainsi : } S = \left\{ -\frac{1}{3}; 2 \right\}$$

## Valeurs absolues et intervalles

### Ex 4B.5 :

Compléter le tableau suivant, selon le modèle :

valeur absolue	distance	inégalité	intervalle
$ x-1  \leq 3$	$d(x;1) \leq 3$	$-2 \leq x \leq 4$	$x \in [-2; 4]$
$ x+3  \leq 2$	$d(x;-3) \leq 2$	$-5 \leq x \leq -1$	$x \in [-5; -1]$
$\left  x - \frac{1}{2} \right  < 2$	$d\left(x; \frac{1}{2}\right) < 2$	$-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$	$x \in \left] -\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right[$
$ x-1  < 2$	$d(x;1) < 2$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \in [-1; 3]$
$\left  x - \frac{5}{2} \right  < \frac{5}{2}$	$d\left(x; \frac{5}{2}\right) < \frac{5}{2}$	$0 < x < 5$	$x \in ]0; 5[$
$\left  x - \frac{2}{3} \right  \geq \frac{1}{3}$	$d\left(x; \frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{3}$	$x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 1$	$x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup [1; +\infty[$

## Inéquations avec la valeur absolue

**Ex 4B.6 :** Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution S sous forme d'intervalle

- a)  $|x-2| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow d(x;2) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{5}{2}; +\infty \right[$
- b)  $1 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq d(x;0) \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$
- c)  $|x+2| \leq -1$  une valeur absolue ne peut être négative :  $S = \emptyset$
- d)  $|-x+3| \geq 4 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow d(x;3) \geq 4 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -1 \right] \cup [7; +\infty[$
- e)  $|x-1| \geq -1$  une valeur absolue est toujours positive :  $S = \mathbb{R}$
- f)  $|2-3x| + |5-x| \geq 1$

$$2-3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$5-x > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < -5 \times (-1) \Leftrightarrow x < 5$$

les valeurs charnières sont :  $\frac{2}{3}$  et 5 ainsi on dresse un tableau de valeurs absolues :

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$5$	$+\infty$
$ 2-3x $	$2-3x$		$3x-2$	$3x-2$
$ 5-x $	$5-x$		$5-x$	$x-5$
$ 2-3x + 5-x $	$7-4x$		$2x+3$	$4x-7$

puis on résout chaque inéquation sur son intervalle de définition :

$$7-4x \geq 1 \Leftrightarrow -4x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-4} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow S_1 = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right] \cap \left] -\infty; \frac{3}{2} \right] = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right]$$

$$2x+3 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\rightarrow S_2 = \left[ \frac{2}{3}; 5 \right] \cap [-1; +\infty[ = \left[ \frac{2}{3}; 5 \right]$$

$$4x-7 \geq 1 \Leftrightarrow 4x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{4} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\rightarrow S_3 = [5; +\infty[ \cap [2; +\infty[ = [5; +\infty[$$

$$\text{Ainsi : } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}; 5 \right] \cup [5; +\infty[ = \mathbb{R}$$