

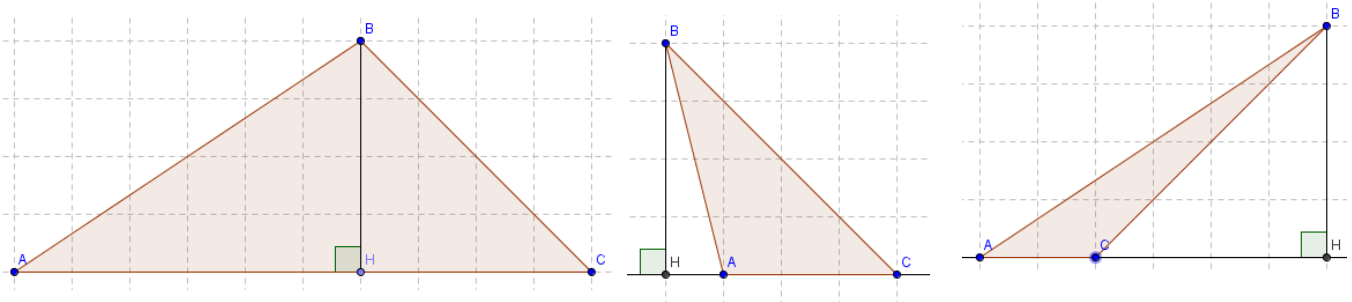
Devoir maison : Introduction des produits scalaires

pour le

Soient A, B et C trois points du plan, on définit Δ par la relation suivante, $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Partie I : reformulation en utilisant le cosinus

1) En utilisant deux fois le même théorème de géométrie de collège démontrer que $\Delta = HA^2 + AC^2 - HC^2$



Cas 1

Cas 2

Cas 3

- 2) Pour chacun des trois cas exprimez HC en fonction de AC et AH
- 3) Prouvez soigneusement que dans chacun des cas Δ vaut $2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Partie II : les points de vue vectoriels et analytiques

On posera dans cette partie $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$.

- 1) Montrer qu'avec les nouvelles notations on a : $\Delta = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
- 2) Après avoir réité la propriété de seconde qui donne la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées, vous donnerez les conditions sous lesquelles cette formule est vraie.
- 3) Exprimer $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$, et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en fonction de x, x', y et y'.
- 4) En déduire que $\Delta = 2(xx' + yy')$

Partie III : le produit scalaire

Le produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et valant $\frac{\Delta}{2}$.

Autrement dit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos((\vec{u}, \vec{v})) = xx' + yy'$

En utilisant la (ou les) forme la plus appropriée répondre aux questions suivantes :

- a. Prouver que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- b. Qu'avec $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ on a : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- c. Qu'avec un réel k on a : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- d. Trouver trois conditions suffisantes pour que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- e. Donner la mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) quand $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$
- f. Donner la mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) quand $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Remarque :

Autant le déterminant est la voie royale pour tous les cas de parallélismes / colinéarité, le produit scalaire sera l'arme de choix pour gérer les cas d'orthogonalité.