Produit scalaire (Bases)

I. Présentation

Rappels : Définition / Propriété

La norme d'un vecteur correspond à sa longueur, ainsi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ vaut AB.
Si k est un réel et $\vec{u}$ un vecteur on aura , $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
Si l'on est dans un repère orthonormé, $\vec{u}\binom{x}{y}$ aura pour norme $\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple :

Soit A(2 ;3) et B(5 ;7) deux points d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Déterminer la mesure de [AB].
$\overrightarrow{AB}\binom{5-2}{7-3} = \overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$ donc AB=$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

Définition 1

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{u}\|^2)$

Exemple

Soit A, B et C trois points du plan.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2\right) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Propriété 1

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

II. Propriétés du produit scalaire dans un repère orthonormé.

Tout ce qui suit se place dans un repère orthonormal.

Propriété 2

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives : $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

$\vec{u}\binom{x}{y}$ donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$, $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ donc $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ et $(\vec{v}-\vec{u})\binom{x'-x}{y'-y}$ donc
$\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x'^2 - 2x'x + x^2 + y'^2 - 2y'y + y^2$
Ainsi $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left((x^2+y^2) + (x'^2+y'^2) - (x'^2 - 2x'x + x^2 + y'^2 - 2y'y + y^2)\right) = \frac{1}{2}(2x'x + 2y'y) = x'x + y'y$

Propriété 3

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel k on aura :
(1) $(\vec{u}+\vec{v})\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et (2) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Démonstration

A faire par vous-même en utilisant la propriété juste avant

Propriété 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non nuls alors $\vec{u}.\vec{v}$ vaut $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si ils sont de même sens et $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ sinon.

Démonstration

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un réel k tel que .... ainsi $\vec{u}.\vec{v} = (k \dots.)$ .... et d'après le (2) de la propriété précédente on a : $\vec{u}.\vec{v} = . \dots \dots$
De plus $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\dots \dots \dots\|$=............. (d'après le rappel dans le I.) ainsi $\|\vec{u}\|^2 = . \dots \dots \dots \dots$
Et par substitution on a $\vec{u}.\vec{v} = . \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
Or $\frac{k}{|k|} = . \dots ....$ si .... et $\frac{k}{|k|} = . \dots ....$ si ...., on a donc la propriété attendue.

Propriété 5
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ $\quad(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
Et $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration (en utilisant la propriété 3)

III. Orthogonalité

Définition 2
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que :
Soit « $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ »
Soit (OA)⊥(OB) quand on pose trois points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

Propriété 5
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Démonstration
à faire par vous-même (vous utiliserez Pythagore et sa réciproque)

Définition 3
D est une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite D est le point d'intersection H de la droite et de la perpendiculaire à D passant par M

Remarque
Vous pouvez imaginer que l'on braque un projecteur sur une droite, éclairant des rayons perpendiculaires à cette dernière. Le projeté d'un point sera son ombre projetée sur la droite.

Propriété 6
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs distincts du vecteur nul tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
Alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

Démonstration

Conséquence
Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

Démonstration
Nous allons limiter notre étude aux cas pour lesquels $(\vec{u};\vec{v})\in[0;\pi]$ car si $(\vec{u};\vec{v})\in[-\pi;0]$ alors on étudiera
Soient O, A , B trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$, et H le projeté orthogonal de B sur (OA) .
On a alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
Si $(\vec{u};\vec{v})\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=OA.OH$ et $OH=OB\,cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$
donc $\vec{u}.\vec{v}=OA.OB\,cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$
Si $(\vec{u};\vec{v})\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=-OA.OH$ et $OH=OB\ \ cos\left(\pi-(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\right)=-OB\ \ cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$
donc $\vec{u}.\vec{v}=-OA.(-OB\,cos(\vec{u};\vec{v}))=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

Remarque :
Si $(\vec{u};\vec{v})\in[-\pi;0]$ alors $(\vec{v}\,;\vec{u})\in[0;\pi]$ et comme $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (propriété 1) on n'aura qu'à refaire la même démonstration en posant $\vec{u}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$