Devoir surveillé 5 : Trigonométrie et probabilités

Exercice 1

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. En déduire (en justifiant) :1) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 2) $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ 3) $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Exercice 2

1) Résoudre dans $[0;2\pi[$: $\cos(3x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(x)$

Astuce : vous pouvez remplacer $\cos(x)$ par $\sin(\ldots)$

Exercice 3

Donner la mesure principale de l'angle dont une des mesures est $\frac{1357\pi}{13}$, donner une autre mesure de l'angle, cette fois ci dans $]2\pi;4\pi]$(attention à la rédaction et aux explications).

Exercice 4

1) Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, tels que $(\vec{u};\vec{v})=\frac{-\pi}{7}$, compléter $(\vec{u};-\vec{v})$=……………., $(-\vec{u};\vec{v})$=…………., $(-\vec{u};-\vec{v})$=…………….,$(\vec{v};\vec{u})$=…………….

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Faire un schéma à main levée (attention à l'orientation) au brouillon

2) Que peut-on dire des mesures de [OA], [OB], [OC] et [OD].
3) Compléter : a) $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}\right)=$…………………… b) $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=$……………………
   c) $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CD}\right)=$…………………… d) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=$…………………… e) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)=$……………………
4) Justifiez les valeurs du b) et du e) de la question 3)

Exercice 5

Un jeu fonctionne de la manière suivante, on lance trois fois de suite une pièce équilibrée de monnaie, le premier « pile » obtenu rapporte2€, le deuxième 4€ de plus, et le troisième rapporte 10€ de plus.

1) Que peut-on déduire de l'hypothèse « la pièce est équilibrée » ?
2) Sachant que la partie coûte 6€ et que l'on note X le gain final, quelles valeurs peut prendre X.

Faire au brouillon un arbre représentant l'expérience aléatoire (on notera P et F respectivement les événements « le lancer est Pile » et « le lancer est Face ».)

3) Donner la loi de probabilité de X
4) En utilisant votre calculatrice donner E(X) et $\sigma(X)$.
5) Le jeu est-il équilibré ?
6) Comment changer le prix de la partie pour que le jeu soit équilibré

Bonus :

7) Comment évolue la variance à la question 6
8) Donner une modification simple du jeu pour que la banque gagne le double

Devoir surveillé 5 : Trigonométrie et probabilités

Exercice 1 15min

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.

$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{4}{4} - \frac{\sqrt{2}+2}{4}$

$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ or $\frac{\pi}{8} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

Exercice 2 15min

Résoudre dans $[0; 2\pi[$: $\cos(3x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos(3x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 5x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{-\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

Dans $[0; 2\pi[$ $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{15}; \frac{11\pi}{15}; \frac{17\pi}{15}; \frac{23\pi}{15}; \frac{29\pi}{15}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{15}; \frac{17\pi}{15}; \frac{23\pi}{15}; \frac{29\pi}{15}\right\}$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Exercice 3 (10min)

Donner la mesure principale de l'angle dont une des mesure est $\frac{1357\pi}{13}$, donner une autre mesure de l'angle, cette fois ci dans $]2\pi; 4\pi]$.

$\frac{1357\pi}{13} - 52 \times 2\pi = \frac{1357\pi}{13} - \frac{1352\pi}{13} = \frac{5\pi}{13}$, $\frac{5\pi}{13}$ est la mesure principale de $\frac{1357\pi}{13}$, car on passe bien d'un réel à l'autre en ajoutant un nombre entier de fois 2π, et car $\frac{5\pi}{13} \in]-\pi; \pi]$

$\frac{5\pi}{13} + 2\pi = \frac{5\pi}{13} + \frac{26\pi}{13} = \frac{31\pi}{13}$ comme cette valeur est bien dans $]2\pi; 4\pi]$, c'est celle que je recherchais.

Exercice 4 15min

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-\pi}{7}$, compléter :

$(\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + \frac{-\pi}{7} = \frac{7\pi}{7}$, $\quad (-\vec{u}; \vec{v}) = \pi + \frac{-\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$, $\quad (-\vec{u}; -\vec{v}) = \frac{-\pi}{7}$, $\quad (\vec{v}; \vec{u}) = -\frac{-\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Nom & Prénom : ………………………………………………. www.dimension-k.com

Faire un schéma à main levée (attention à l'orientation)

2) ABCD étant un rectangle ses diagonales sont de même mesure, et donc ses demies diagonales [OA], [OB], [OC] et [OD] le sont aussi.

3) a) $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$ b) $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$c) $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CD}) = \frac{5\pi}{6}$ d) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$ e) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{3}$

4) détail du b) : ABCD étant un rectangle on a $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ de plus $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{6}$ donc $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}) = \frac{-\pi}{6}$

j'utilise la relation de Chasles $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$

détail du e) $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow -\pi = -(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow -\pi = -\frac{2\pi}{3} + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 5 20min

Un jeu fonctionne de la manière suivante, on lance trois fois de suite une pièce équilibrée de monnaie, le premier « pile » obtenu rapporte2€, le deuxième 4€, et le troisième rapporte 10€.

« la pièce est équilibrée » veut dire que j'ai autant de chance d'avoir pile que d'avoir face (hypothèse d'équiprobabilité)

On peut avoir ,zéro, un, deux ou trois piles donc on peut gagner 0, ou 2 ou 2+4 ou 2+4+10=16, sachant que l'on a payé 6€ pour jouer, les gains seront donc de -6€, -4€, 0€ ou 10€

La loi de X sera donc :

x_i	-6	-4	0	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

La calculatrice nous donne E(X)=-1 et $\sigma(X) = \sqrt{22} \approx 4{,}69$

Le jeu n'est pas équilibré, c'est l'organisateur qui gagne en moyenne 1 € par partie.

On voudrait avoir une espérance nulle, on cherche donc b tel que E(X+b)=0 or E(X+b)=E(X)+b ainsi -1 + b = 0 donc b = 1 , on doit donc baisser le prix de la partie de 1€ , elle couterait alors 5€

Toutes les valeurs seraient alors augmentées de 1 , la moyenne aussi donc les écarts à la moyenne seraient inchangés, donc la variance ne varierait pas ^^

En multipliant le prix du billet et les récompenses par deux, tous les gains seraient multipliés par 2 et donc la moyenne aussi (E(aX) = aE(X))